

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Балтийский государственный технический университет «Военмех»

РАСЧЕТ ОБТЕКАНИЯ
ПОДВОДНОГО АППАРАТА
В СРЕДЕ «ЛОГОС»

Плоская задача внешней гидродинамики

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2021

А в т о р ы: *К.Н. Кравченко, Е.В. Глазунова, А.А. Курносов, А.А. Деулин,
Д.В. Фомичев, Н.А. Зорнина, П.С. Андреев, И.В. Тетерина*

Под общей редакцией первого заместителя генерального директора – главного
инженера АО «СПМБМ «Малахит» Н.А. Новоселова

УДК 539.3:004.942(075.8)

P24

P24 **Расчет** обтекания подводного аппарата в среде «Логос». Плоская задача внешней гидродинамики: учебное пособие / К.Н. Кравченко, Е.В. Глазунова, А.А. Курносов [и др.]; под ред. Н.А. Новоселова; Балт. гос. техн. ун-т. – СПб., 2021. – 76 с.
ISBN 978-5-907324-63-3

Приведены основные понятия гидромеханики, описаны различные методы численного физического моделирования, возможности современных программных решений задач внешней гидромеханики, рассмотрены задачи обтекания тел невязкой / вязкой жидкостями, решена прикладная задача обтекания на примере крылового профиля NASA-2406, рассмотрены методы вычислительной гидромеханики.

Предназначено для студентов, изучающих механику жидкости и газа и вычислительную гидрогазодинамику.

УДК 539.3:004.942(075.8)

Р е ц е н з е н т канд. техн. наук, доц. Военного учебного центра
БГТУ «Военмех» *А.В. Петрунин*

*Утверждено
редакционно-издательским
советом университета*

ISBN 978-5-907324-63-3

© БГТУ, 2021
© Авторы, 2021

1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ АЭРОГИДРОМЕХАНИКИ

На протяжении долгого времени в гидромеханике развивались два направления: теоретическая гидромеханика и гидравлика. У каждой из них был свой набор понятий. Так, теоретическая гидромеханика оперировала идеальной, не обладающей вязкостью жидкостью, следствием чего получался, к примеру, парадоксальный результат Эйлера–Даламбера: сопротивление движению тела в жидкости равно нулю. Гидравлики на основе экспериментов и наблюдений выводили свои эмпирические законы движения воды. На протяжении всего XIX в. шло трудное сближение двух наук. Наконец был найден общий фундамент в виде уравнений Навье–Стокса. По сути дела, это второй закон Ньютона как равнодействующая всех сил, приложенных к выделенному бесконечно малому жидкому объёму. Эта система дифференциальных уравнений второго порядка оказалась невероятно сложной. Известно, например, что математический институт имени Клэя представил задачу о решении уравнений Навье–Стокса как «задачу Миллениум» и предлагает за её решение 1 млн долларов. Это уравнение невозможно решить аналитически (кроме некоторых частных случаев). Теоретическая гидромеханика как научный предмет, по сути, пытается найти упрощения, обходные пути, методы в решении уравнений Навье–Стокса. Так, ещё в XIX в. был найден замечательный метод – использование теории функций комплексного переменного (ТФКП), который в принципе позволил решить плоскую задачу. В настоящее время большие надежды возлагаются на компьютерное численное моделирование процессов обтекания, в том числе с использованием суперкомпьютеров. В настоящее время гидромеханика является разветвлённой, большой дисциплиной, разделившейся как на области научных исследований определённых комплексов явлений (мореходность, управляемость, движители), так и на определённые объекты изучения (экранопланы, подводные лодки, надводные корабли, суда с динамическими принципами поддержания).

Общие уравнения гидродинамики сложны в математическом отношении – они нелинейны. Последнее видно даже из простого соотношения Бернулли, в которое скорость входит во второй степени. Положение ещё более усложняется (в математическом плане) при изучении движения вязких жидкостей. Лишь небольшое число задач на вязкие течения может быть решено точно. В связи с этим в гидродинамике большое значение придаётся эксперименту.

Несмотря на различия молекулярной структуры газов и капельных жидкостей, с точки зрения законов их движения между ними во многих случаях нет различия. Исследования показывают, что формулы гидромеханики, выведенные для несжимаемых жидкостей, справедливы и для газов, если скорость их движения не превосходит некоторого предела. Этот предел зависит от отношения скорости движения жидкости/газа к скорости распространения звука. Так, при отношении 0,2 возможная погрешность в определении давления жидкости/газа

по формулам для несжимаемой жидкости составляет не более одного процента. Поскольку скорость распространения звука в воздухе составляет 350 м/с, то при скоростях воздуха до 70...75 м/с законы движения капельных и газообразных жидкостей можно считать общими. Исходя из этого, испытания моделей глубокопогруженных тел, движущихся в воде заменяют испытанием их в потоке воздуха, например в аэродинамических трубах. Аэромеханика и гидромеханика в случае малых скоростей движения и несжимаемости физической среды синонимичны. Часто объединённую дисциплину называют аэрогидромеханикой.

Несмотря на различие структур капельных жидкостей и газов, в аэрогидромеханике принято использовать единую условную модель жидкости, которая рассматривается как сплошная деформируемая среда. Введение понятия сплошной среды позволяет считать все её характерные величины, описывающие её свойства, особенности движения и действующие в ней силы непрерывными функциями координат пространства, в котором находится жидкость. Так как физические свойства жидкости и параметры её течения описываются различными скалярными, векторными, а иногда и тензорными величинами, свойство сплошности жидкости позволяет широко применять в аэрогидромеханике математический аппарат теории непрерывных функций, в том числе теорию скалярных и векторных полей.

1.1. Физические параметры и модели состояния среды

Плотность. Основной характеристикой жидкости является её плотность ρ . В пространстве, занятом жидкостью, образуется скалярное поле плотности.

Вязкость. Если давление, действующее на элементарную поверхность выделенного объёма жидкости, характеризует нормальное напряжение, то силы вязкости, действующие вдоль рассматриваемой элементарной поверхности при движении выделенного объёма, характеризуют касательные напряжения.

Для определения величины силы вязкости пользуются гипотезой Ньютона, заключающейся в следующем. Рассматриваются два соседних слоя газа или жидкости, находящихся на бесконечно малом расстоянии друг от друга и текущих в том же направлении, но с разными скоростями (рис. 1). Тогда в силу молекулярного взаимодействия частицы слоя жидкости, текущей быстрее, будут ускорять течение медленно движущегося слоя, а частицы, принадлежащие медленно текущему слою, будут замедлять течение быстро движущегося. Сила dX_f и будет силой вязкости. Эта сила пропорциональна величине рассматриваемой площадки и разности между скоростями слоёв, которая может быть охарактеризована градиентом скорости по нормали к поверхности du/dz и выражает степень нарастания или убывания скорости. В обозначениях на рис. 1 сила вязкости

$$dX_f = \mu \frac{du_x}{dz} dS,$$

где μ – абсолютный динамический коэффициент вязкости, численно равный силе, действующей на единицу поверхности слоя, когда на единице длины, взятой нормально к поверхности слоя, скорость изменяется также на единицу. Единица измерения динамического коэффициента вязкости μ в системе СИ – Н·с/м².

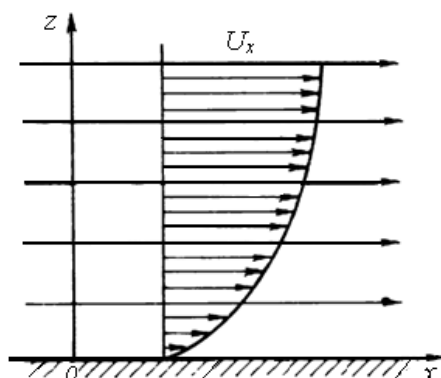


Рис. 1. Распределение скоростей потока ввиду наличия вязкости жидкости

В инженерных приложениях часто применяется так называемый кинематический коэффициент вязкости: $\nu = \mu / \rho$, не зависящий от силы, чем и объясняется его название. Единица измерения ν – м²/с².

Современная аэрогидромеханика пользуется механическими образами, представляющими собой схематизацию среды. Такие образы называются механическими моделями среды.

Идеальная несжимаемая жидкость. Воздух или вода рассматриваются как материя с постоянной плотностью, непрерывно распределённая в пространстве и лишённая сил вязкости, т.е. внутри текущей среды могут существовать лишь нормальные напряжения и отсутствуют тангенциальные напряжения. Нормальные напряжения суть давления, растяжения предполагаются несуществующими. В применении к такой среде аэродинамика совпадает с гидродинамикой идеальной жидкости.

Вязкая несжимаемая жидкость. Модель усложняется допущением существования тангенциальных напряжений, которые называются силами вязкости или силами внутреннего давления. В применении к такой среде аэродинамика совпадает с гидродинамикой вязкой жидкости.

Поля в окрестности обтекаемого тела. При обтекании тела потоком изменяются скорости в окружающей тело среде, а также давления, плотности и т.д. Совокупность изменений скоростей, ускорений, давлений образует векторные или скалярные поля.

Линии тока и траектории. Линией тока называется линия, касательная в каждой точке которой совпадает с вектором скорости в этой точке. Траекторией движения частицы называется линия, описываемая частицей при её движении.

Потенциальный поток. Если движение жидкости таково, что проекции u , v , w скорости суть частные производные от одной и той же функции $\phi(x, y, z, t)$ по соответствующим переменным:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z},$$

то движение называется потенциальным, а сама функция $\phi(x, y, z, t)$ – потенциалом скоростей.

Течение скорости потока. Элементом течения скорости \vec{U} вдоль элемента $d\vec{s}$ некоторой линии называется скалярное произведение $(\vec{U} \cdot d\vec{s})$, или

$$d\Gamma = U ds \cos \theta = u \cdot dx + v \cdot dy + w \cdot dz,$$

где θ – угол между векторами \vec{U} и $d\vec{s}$, рад. Течение скорости по какому-нибудь конечному контуру AB представляется криволинейным интегралом:

$$\Gamma_{AB} = \int_{(AB)} U ds \cos \theta = \int_{(AB)} u \cdot dx + v \cdot dy + w \cdot dz.$$

Циркуляцией скорости называется течение по какому-нибудь замкнутому контуру:

$$\Gamma = \int_{(C)} u \cdot dx + v \cdot dy + w \cdot dz = \oint u \cdot dx + v \cdot dy + w \cdot dz.$$

1.2. Основные уравнения аэрогидромеханики

Рассмотрим объём V , ограниченный некоторой произвольной поверхностью S . Масса данного объёма может измениться только за счёт втекающего и вытекающего из него потока жидкости. Тогда скорость изменения массы в объёме будет равна разнице расходов на входе и выходе из объёма.

Поток жидкости с плотностью ρ , протекающей со скоростью \vec{U} через сечение S , вычисляется по формуле $\vec{G} = \rho \vec{U} S$. Тогда поток через малую площадку dS будет равен $\rho \vec{U} \cdot d\vec{S}$ [4]. Интегрируя по всей поверхности S , получим

$$-\frac{dm}{dt} = \oint_S \rho \vec{U} \cdot d\vec{S}.$$

Учитывая, что $m = \int_V \rho dV$, получим

$$-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \oint_S \rho \vec{U} \cdot d\vec{S},$$

Используя теорему Остроградского–Гаусса, получим

$$\begin{aligned} -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV &= \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{U}) dV, \\ \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{U}) \right) dV &= 0. \end{aligned}$$

Интеграл по произвольному объёму от непрерывной функции может быть равен нулю, только если сама функция тождественно равна нулю. Отсюда получаем уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{U}) = 0. \quad (1)$$

В несжимаемой жидкости плотность постоянна, т.е. $\partial \rho / \partial t = 0$, и уравнение можно будет записать в виде $\operatorname{div} \vec{U} = 0$. Уравнение неразрывности является одним из основных уравнений гидромеханики и будет активно использоваться дальше.

В соответствии с моделями сред (жидкостей) рассматриваются уравнения движения идеальной и вязкой жидкостей.

Уравнения движения идеальной жидкости наиболее часто употребляются в форме, данной Эйлером:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \end{cases} \quad (2)$$

где X, Y, Z – проекции силы, отнесённой к единице массы, Н/кг. К этому уравнению также необходимо присоединить уравнение неразрывности (1).

При движении вязкой жидкости каждая площадка внутри нее испытывает со стороны жидкости не только нормальные напряжения (давления), как в идеальной жидкости, но и тангенциальные. Все эти напряжения зависят от направления площадки. Можно найти напряжения для любого направления площадки, если известны нормальные и тангенциальные напряжения для трёх взаимно перпендикулярных направлений: например, достаточно знать напряжения для трёх положений площадки, перпендикулярных к трём прямоугольным осям координат OX, OY, OZ . Если первым индексом обозначить ось, к которой площадка перпендикулярна, а вторым индексом – ось, на которую проецируется напряжение, то получаются девять напряжений: $p_{xx}, p_{xy}, p_{xz}, p_{yx}, p_{yy}, p_{yz}, p_{zx}, p_{zy}, p_{zz}$. Здесь p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} представляют собой нормальные напряжения, а остальные – тангенциальные. Тогда можно показать, что в дополнение к (2) справа появляются дополнительные слагаемые, отражающие собою вклад вязкости воды. В итоге получаются так называемые уравнения Навье–Стокса:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w, \end{cases} \quad (3)$$

где Δ – оператор Лапласа. К этим трём уравнениям надо присоединить ещё уравнение неразрывности (1) и уравнение состояния жидкой среды.

1.3. Пограничный слой и характер обтекания тел

Поскольку интегрирование вышеприведённых уравнений движения вязкой жидкости и по настоящее время представляет непреодолимые трудности, оно удаётся только в очень частных простейших случаях. Согласно Прандтлю явление вязкости жидкости заметно сказывается только в пограничном слое, прилегающем непосредственно к обтекаемому телу. Введённое Прандтлем понятие пограничного слоя играет существенную роль в аэрогидромеханике.

Если бы жидкость не прилипла к стенкам тела, то для рассмотренных течений картина линий тока была бы почти одинакова как при наличии вязкости, так и при её отсутствии. Однако в реальных жидкостях всегда происходит прилипание к стенкам, которое значительно изменяет картину линий тока, так как вызывает вследствие трения торможение прилегающего к стенкам слоя жидкости. В этом тонком слое скорость течения возрастает от нуля на стенке (прилипание) до своего полного значения во внешнем потоке, в котором жидкость можно рассматривать как текущую без трения. Указанный тонкий слой называют, следуя Л. Прандтлю, пограничным. Очевидно, что пограничный слой тем меньше, чем меньше коэффициент вязкости. Касательное напряжение, возникающее вследствие трения, внутри пограничного слоя получается весьма большим даже при очень малой вязкости, так как градиент скорости в направлении, перпендикулярном к поверхности тела, велик. В то же время вне пограничного слоя касательное напряжение очень мало. Это обстоятельство позволяет для теоретического исследования течений жидкостей с малой вязкостью разбить все поле течения на две области: область тонкого пограничного слоя вблизи стенки, в которой следует учитывать силы трения, и область вне пограничного слоя, в которой силами трения, вследствие их малости, можно пренебрегать и поэтому с большой степенью точности применять здесь закономерности теории идеальной жидкости. Такое разделение значительно упрощает теоретическое исследование течений жидкостей с малой вязкостью.

Жидкость, заторможенная в пограничном слое, не во всех случаях прилегает ко всей обтекаемой стенке тела в виде тонкого слоя. Пограничный слой сильно утолщается вниз по течению. При этом, ввиду трения о само тело, в пограничном слое возникает возвратное течение, что влечёт за собой вынос жидкости, заторможенной в пограничном слое, во внешнее течение, вследствие чего последнее отрывается от тела. Отрыв пограничного слоя всегда сопряжён с сильным образованием вихрей и большей потерей энергии на кормовой части обтекаемого тела (рис. 2).

Эти явления наблюдаются в первую очередь у плохо обтекаемых тел, например, у круглого цилиндра и шара. В результате за кормовой частью таких тел образуется область сильно замедленного течения (так называемая застойная область), в которой распределение давления резко отличается от распределения давления, соответствующего течению без трения. Именно это изменённое, по сравнению со случаем идеальной жидкости, распределение давления, связанное с отрывом пограничного слоя, и является причиной большого сопротивления плохо обтекаемых тел.

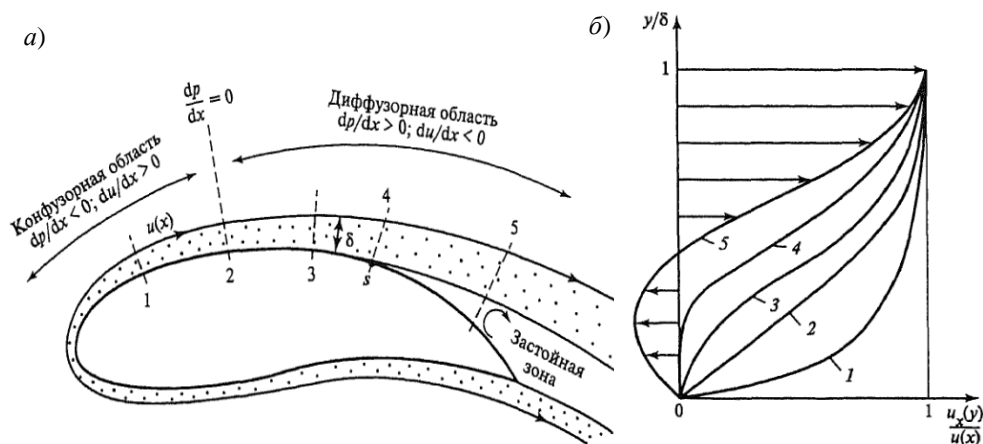


Рис. 2. Схема пограничного слоя с продольным градиентом давления (а) и изменение формы профиля скорости (б): s – точка отрыва пограничного слоя; 1–5 – характерные сечения пограничного слоя

Образование вихрей в пограничном слое при движении тела связано с дополнительными энергетическими затратами, поэтому оно приводит к возникновению вихревого сопротивления, что обусловлено перепадом давления вдоль поверхности тела, которое, в свою очередь, зависит от формы тела. Поэтому вихревое сопротивление называют сопротивлением формы. Чем более плавно изменяются обводы тела, тем меньше градиент давления и тем меньше сопротивление формы. С этой точки зрения движущиеся в жидкости тела подразделяются на хорошо и плохо обтекаемые. Хорошо обтекаемые тела обычно имеют большое удлинение (отношение продольного размера, вдоль которого тело движется или обтекается, к поперечному) и плавные обводы. Идеальным хорошо обтекаемым телом является гладкая плоская пластина, расположенная вдоль потока. Небольшой градиент давления вдоль пластины создаётся только за счёт оттеснения пограничным слоем линий тока внешнего течения, поэтому сопротивление формы такой пластины мало. Но если ту же пластину поставить поперёк потока, то градиент давления на её кромках будет очень велик и с них будут сходить непрерывные вихревые дорожки. Сопротивление формы в этом случае будет значительным. Пластина, расположенная поперёк потока, относится к плохо обтекаемым телам с фиксированными точками отрыва пограничного слоя.

К другому типу плохо обтекаемых тел – с перемещающимися точками отрыва – можно отнести, например, шар или цилиндр. Вследствие малого удлинения перепад давления вдоль поверхности шара велик, при обтекании его с достаточно большими скоростями наблюдается ярко выраженный отрыв пограничного слоя и возникает сопротивление формы. Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что место отрыва пограничного слоя от поверхности шара зависит от режима течения в слое. При ламинарном режиме точки отрыва находятся неподалёку от миделя, зона, где образуются вихри, очень широка и, соответственно, велико сопротивление формы. С увеличением скорости потока и переходом режима течения в слое в турбулентный, благодаря увеличению кинетической энергии вихрей, зона отрыва смещается к заднему краю шара, что приводит к уменьшению сопротивления формы.

тической энергии жидких частиц, точки отрыва смещаются в корму, вихревая зона сужается и сопротивление формы падает. Явление резкого снижения сопротивления плохо обтекаемых тел с перемещающимися точками отрыва пограничного слоя при переходе от ламинарного режима к турбулентному носит название кризиса сопротивления.

Тело принято называть хорошо обтекаемым, если образующийся на его поверхности пограничный слой жидкости или газа прилегает к телу во всех его частях. Обтекание такого тела характеризуется плавностью и стабильностью течения жидкости или газа вблизи поверхности тела, а основную часть испытываемого им сопротивления составляют силы трения.

Тело считается плохо обтекаемым, если оно обтекается с отрывом пограничного слоя или образованием струйно-отрывных течений. Неблагоприятный характер обтекания тел такого рода обуславливается прежде всего неудовлетворительной формой их обводов: большой относительной толщиной сечения, наличием плоских поверхностей, расположенных поперёк потока, острых кромок и т.д. Прямым следствием этих неблагоприятных в аэрогидродинамическом отношении процессов является увеличение лобового сопротивления тел и возникновение боковых периодических сил.

1.4. Переход ламинарного движения в турбулентное

Ламинарное и турбулентные движения при некоторых условиях переходят одно в другое. С возрастанием скорости ламинарное движение теряет свою устойчивость, при этом любые случайные малые возмущения, которые вначале вызывали лишь малые колебания вокруг устойчивого ламинарного движения, начинают быстро развиваться и приводят к новой форме движения жидкости – к турбулентному её движению.

Для исследования турбулентных движений приходится применять особые, характерные для существа рассматриваемого явления приёмы, связанные с заменой действительного движения некоторой упрощённой схемой осреднённого в пространстве и времени движения. В 1883 г. О. Рейнольдс на основании большого числа систематических наблюдений за движением воды в круглой цилиндрической трубе заметил, что существует некоторое характерное для режима движения критическое число $Re_{кр} = U_{cp}d/\nu$, где U_{cp} – средняя скорость движения в трубе, м/с; d – диаметр трубы, м; ν – коэффициент кинематической вязкости, м²/с. Это число, впоследствии названное критическим числом Рейнольдса, служит основным критерием перехода ламинарного движения в турбулентное.

1.5. Законы подобия и безразмерные коэффициенты аэрогидродинамических сил

Если два тела подобны геометрически, то отношение любых их двух сходственных размеров (например, ℓ_m и ℓ) постоянно, или, иначе говоря, у них выдержано постоянство геометрического или линейного масштаба: $\ell_m/\ell = \text{const}$,

где ℓ_M и ℓ – два произвольно выбранных сходственных размера (соответственных длин).

Два движения геометрически и кинематически подобны, если сходственные частицы (точки) потоков, обтекающих геометрически подобные тела, проходят подобные пути в пропорциональные отрезки времени. Это значит, что одновременно с наличием геометрического подобия существует и постоянство отношения отрезков времени t_M и t : $t_M/t = \text{const}_1$, т.е. для рассматриваемых отрезков времени, характеризующих движение на соответственных элементах пути, отношение t_M/t одинаково.

Если U_M и U – соответственно скорости течения в сходственных точках потоков, обтекающих геометрически подобные тела, то при наличии кинематического подобия отношение скоростей U_M/U будет тоже постоянной величиной: $U_M/U = \text{const}_2$.

Аналогичный вывод может быть сделан и об отношении ускорений:

$$\frac{j_M}{j} = \frac{\ell_M t^2}{\ell t_M^2} = \frac{U_M^2/\ell_M}{U^2/\ell} = \text{const}_3. \quad (4)$$

Если пути, проходимые частицами обтекающих потоков, подобны, т.е. линейный масштаб выдержан, а отрезки времени, в которые эти пути проходятся, не пропорциональны друг другу, то движения не будут кинематически выдержаны, даже при геометрическом подобии.

Явления будут динамически подобными, если в сходственных точках сравниваемых потоков, обтекающих натурный объект и его модель, будут соблюдаться условия соответствия всех элементов, создающих динамическую картину, т.е. будут подобны многоугольники сил, действующих на соответственные элементы обтекающих потоков. При динамическом подобии элементарные силы, приложенные к выделенным объёмам сравниваемых потоков в сходственных точках, должны быть одинаково направлены и выдержаны в некотором определённом постоянном соотношении: $R_M/R = \text{const}_4$.

Подобие называется полным, если во всем пространстве, окружающем оба сравниваемых объекта – модель и натуру, – соблюдается подобие картин обтекания в целом.

Рассмотрим два подобных потока, обтекающих геометрически подобные модель и натуру. Это соответствует условию соблюдения подобия многоугольников скоростей, ускорений и сил. Выделим в обоих рассматриваемых потоках два сходственных элементарных объёма с массами Δm_M и Δm и линейными размерами $\Delta \ell_M$ и $\Delta \ell$. Обозначив ускорения центров тяжести этих объёмов через j_M и j , получим следующее соотношение для элементарных результирующих сил, действующих на выделенные объёмы:

$$\frac{\Delta R_M}{\Delta R} = \frac{\Delta m_M j_M}{\Delta m j} = \frac{\rho_M \Delta \ell_M^3 j_M}{\rho \Delta \ell^3 j}.$$

Используя (4), получаем окончательно

$$\frac{\Delta R_M}{\Delta R} = \frac{\Delta m_{jM}}{\Delta mj} = \frac{\rho_M \Delta \ell_M^2 U_M^2}{\rho \Delta \ell^2 U^2}. \quad (5)$$

Полученное соотношение для элементарных сил может быть распространено и на конечные силы, действующие на конечные объёмы. Переписав (5), получим

$$\frac{R_M}{\rho_M U_M^2 \ell_M^2} = \frac{R}{\rho U^2 \ell^2} = \text{const}_5. \quad (6)$$

Равенство (6) представляет собой выражение для безразмерного коэффициента, которое получается из эксперимента.

Аэрогидродинамический момент относительно некоторой выбранной оси можно представить как произведение действующей на тело аэрогидродинамической силы на плечо этой силы относительно выбранной оси. Момент, действующий на обтекаемое тело: $M = \rho \ell^2 U^2 \ell$. Отношение моментов для модели и натуры:

$$\frac{M_M}{\rho_M U_M^2 \ell_M^3} = \frac{M}{\rho U^2 \ell^3} = \text{const}_6.$$

При обтекании жидкостью или газом твёрдых тел на поверхностях последних возникает некоторое избыточное давление. Отношение давлений в сходственных точках может быть представлено в виде элементарных аэрогидродинамических сил, распределённых по элементарным площадкам:

$$\frac{p_M}{p} = \frac{\Delta R_M / \Delta \ell_M^2}{\Delta R / \Delta \ell^2}.$$

Используя соотношение (6), получаем

$$\frac{p_M}{\rho_M U_M^2} = \frac{p}{\rho U^2} = \text{const}_7.$$

Рассмотрим теперь условия обтекания, при которых основную роль играют силы вязкости. Кроме того, пренебрежём также весомостью среды, имея в виду случай, когда относительная роль сил веса мала по сравнению с силами вязкости. При сделанных предположениях условия подобия будут определяться отношениями основных действующих сил – сил вязкости и инерционных. Используя выражение для силы вязкости, можно записать:

$$\frac{\Delta X_{fM}}{\Delta X_f} = \frac{\mu_M \Delta \ell_M^2 \frac{dU_M}{dy_M}}{\mu \Delta \ell^2 \frac{dU}{dy}} = \frac{\mu_M \Delta \ell_M U_M}{\mu \Delta \ell U}.$$

Условие подобия требует равенства отношений сил вязкости и инерционных сил:

$$\frac{\Delta X_{f_M}}{\Delta X_f} = \frac{\Delta R_M}{\Delta R} = \frac{\mu_M \Delta \ell_M U_M}{\mu \Delta \ell U} = \frac{\rho_M \Delta \ell_M^2 U_M^2}{\rho \Delta \ell_2 U^2}.$$

Легко видеть, что из последнего равенства можно получить соотношение

$$\frac{\rho_M U_M \ell_M}{\mu_M} = \frac{\rho U \ell}{\mu} = \frac{U_M \ell_M}{\nu_M} = \frac{U \ell}{\nu} = \text{Re} = \text{const}_g.$$

Число Рейнольдса Re имеет большое значение в экспериментальной аэрогидродинамике. Оно определяет подобие по силам вязкости и показывает отношение к ним сил инерции движения потока. Соблюдение постоянства числа Re является условием подобия, характеризующего выдерживание в опыте подобия по вязкости. Опыты показали, что ряд важнейших аэрогидродинамических характеристики существенно зависит от Re .

Рассмотрим теперь несколько иные условия подобия. Предположим, что в двух сравниваемых потоках основную роль играют силы тяжести. Эффектом сил вязкости пренебрегаем. Среду в обоих случаях будем считать несжимаемой. Картины обтекания при подобной постановке задачи будут определяться отношением веса к инерционным силам. Подобие будет выдержано, если выдержано постоянство этого отношения. Найдём отношение весов для сравниваемых потоков. Отношение сил веса двух элементарных объёмов в сходственных точках сравниваемых потоков

$$\frac{G_M}{G} = \frac{\rho_M \Delta \ell_M^3 g_M}{\rho \Delta \ell^3 g}. \quad (7)$$

Переходя к конечным объёмам и приравнявая (7) и (5), получаем

$$\frac{G_M}{G} = \frac{\Delta R_M}{\Delta R} = \frac{\rho_M \Delta \ell_M^3 g_M}{\rho \Delta \ell_3 g} = \frac{\rho_M \Delta \ell_M^2 U_M^2}{\rho \Delta \ell_2 U^2}.$$

Последнее уравнение может быть переписано в виде

$$\frac{\ell g}{U^2} = \frac{\ell_M g_M}{U_M^2} = \text{Fr} = \text{const}_g.$$

Если числа Фруда (Fr) для модели и натуре равны, то в сравниваемых потоках соблюдено подобие по весам. Следовательно, закон подобия, состоящий в соблюдении постоянства Fr , характеризует подобие по весомости обтекающих сред. Моделирование по Fr применяется во всех случаях, когда весомость среды решающим образом влияет на картину обтекания. В случае наличия свободной поверхности тяжёлой жидкости действие этой жидкости на тела составляет преобладающую часть лобового сопротивления и других сил и моментов.

При обтекании любых плохо обтекаемых тел и конструкций происходит периодический отрыв вихрей, вызывающих колебания тел. В этих условиях все кинематические и динамические характеристики натуре и модели будут изменяться также по периодическому закону. При обтекании потоком жидкости колеблющегося поперёк потока круглого цилиндра путь, пройденный частицей жидкости поперёк потока за время Δt , пропорционален пути натурального цилиндра

поперёк потока $\Delta y = \chi \cdot 2\pi f d \Delta t$. Соответственно путь сходственной точки поперёк потока при обтекании модели: $\Delta y_M = \chi \cdot 2\pi f_M d \Delta t_M$, где χ – коэффициент пропорциональности; d – диаметр цилиндра, м; f – частота колебания, Гц.

За время Δt и Δt_M сходственные точки соответственно переместятся вдоль потока на расстояния $\Delta s = U \Delta t$ и $\Delta s_M = U_M \Delta t_M$. Если кинематические процессы подобны, то треугольники, образованные перемещениями, также подобны. Отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{\Delta y_M}{\Delta s_M} = \frac{\chi \cdot 2\pi f d \Delta t}{U \Delta t} = \frac{\chi \cdot 2\pi f_M d \Delta t_M}{U_M \Delta t_M},$$

или

$$\frac{df}{U} = \frac{d_M f_M}{U_M} = Sh = \text{const}_{10}.$$

Соблюдение постоянства числа Струхалия (Sh) для природы и модели обеспечивает моделирование кинематики периодических процессов обтекания.

Все приводимые расчёты относятся к случаю средних значений аэрогидродинамических сил при установившемся движении тела в несжимаемой безграничной жидкости, когда определяющим процесс критерием является число Re. В случаях, когда рассматриваются эксперименты по определению нестационарных сил, действующих на плохо обтекаемое тело при установившемся или неустановившемся движении в несжимаемой жидкости, определяющим критерием является число Струхалия Sh.

1.6. Теория обтекания тел при решении задач аэрогидромеханики

1.6.1. Внешние задачи гидродинамики в плоской постановке

Плоское течение – течение, для которого можно ввести прямоугольную декартову систему координат, в которой параметры не зависят от одной из координат.

Плоское течение лишено третьего измерения. Это значит, что никакой из параметров (составляющие скоростей, давление, силы и ускорения) не изменяется вдоль третьей оси, а располагается в одной плоскости. При этом картина течения будет одинаковой во всех параллельных друг другу плоскостях сечений. Рассматривая плоские задачи, мы обязаны рассматривать обтекание бесконечно длинных тел; в задачах вычислительной гидромеханики можно рассмотреть бесконечно короткое тело, зажатое между двумя стенками без прилипания.

Методы ТФКП в своей основе просты и излагаются во всех курсах гидромеханики. Настоящей классикой учебных задач является задача обтекания цилиндра невязкой несжимаемой жидкостью.

В 1920-х годах Людвигом Прандтлем был открыт так называемый пограничный слой – небольшой пристеночный слой жидкости, в котором существенна сила вязкости жидкости, тогда как вне пограничного слоя жидкость можно считать идеальной. Таким образом, сложную задачу определения гидроаэродинамических характеристик оказалось возможным разделить на две простых: считая пограничный слой малым (с определёнными оговорками), зону вокруг тела мож-

но разделить на две части: малый объём вблизи тела, где действуют силы вязкости, и внешний объём вне тела идеальной жидкости, где силы вязкости не действуют.

В ходе развития ТФКП обнаружилась большая роль так называемых конформных отображений. Конформными отображениями называются такие геометрические отображения одной плоскости на другую, при которых сохраняются углы. Так как вектор скорости задаётся его направляющими углами к координатным осям, векторы скоростей можно конформно отобразить. Теорема Римана утверждает, что любое тело можно конформно отобразить на любое из заранее данных. Основоположник авиации Н.Е. Жуковский нашёл так называемый профиль Жуковского, который можно отобразить на цилиндр; зная обтекание цилиндра, можно найти обтекание крылового профиля.

В дальнейшем мы рассмотрим подробно постановку и решение методами ТФКП задачи обтекания цилиндра, а далее – бесконечно тонкой пластины как предельно тонкого цилиндра.

1.6.2. Обтекание цилиндра невязкой жидкостью

Характеристическая функция. Известно, что для исследования плоского течения жидкости необходимо определить две функции U_x и U_y , зависящие от координат x и y , а также от времени t , если движение неустановившееся. Эти две функции не являются независимыми, а связаны между собой уравнением неразрывности (1).

Оказывается, что при плоском течении жидкости вместо двух функций U_x и U_y можно ввести одну функцию $\Psi(x, y)$, полностью характеризующей поток. Это уменьшает число неизвестных, подлежащих определению, а следовательно, значительно упрощает решение задачи. Вдоль линии тока $d\Psi = 0$, т.е. функция $\Psi = \text{const}$. В силу этого свойства функция Ψ называется функцией тока. Отсюда следует, что для получения уравнений линий тока необходимо определить функцию тока и приравнять её к постоянной величине. В результате будет найдено семейство линий тока плоского течения жидкости. Этот метод определения линий тока проще, чем интегрирование дифференциальных уравнений.

Для всякого плоского течения жидкости существует функция тока Ψ . Можно показать, что в случае безвихревого потенциального течения функция тока Ψ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}.$$

Потенциал скорости также удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}.$$

Следовательно, φ и Ψ в плоском потоке являются гармоническими функциями. Сопоставляя равенства для проекций скоростей, убеждаемся, что функции φ и Ψ для плоского потока связаны между собой уравнениями Коши–Римана. Согласно

но этим условиям функции φ и Ψ для плоского потока можно рассматривать не раздельно в области изменения действительных переменных x и y , а как комплексную комбинацию в плоскости комплексного переменного. Функция $w(z) = \varphi(x, y) + i\Psi(x, y)$, $i^2 = -1$, действительная часть которой представляет собой потенциал φ , а коэффициент при мнимой части Ψ – функцию тока, называется характеристической функцией плоского безвихревого потока. Таким образом, плоский безвихревой поток жидкости может быть охарактеризован либо функциями φ и Ψ двух независимых действительных переменных, либо комплексной функцией $w(z)$ одного независимого комплексного переменного z . Исследование функции одного независимого переменного много проще, чем функции двух независимых переменных. Введение характеристической функции позволяет использовать для решения плоской задачи гидромеханики эффективный аппарат ТФКП.

Характеристические функции можно складывать. Любая аналитическая функция комплексного переменного может характеризовать некоторый потенциальный поток жидкости. Ниже будут рассмотрены некоторые функции комплексного переменного, характеризующие простейшие плоские потоки, которые находят широкое применение при использовании метода наложения.

Однородный поток (рис. 3). Рассмотрим характеристическую функцию:

$$w(z) = U_{\infty} e^{-i\theta} z = U_{\infty} (\cos \theta - i \sin \theta) z.$$

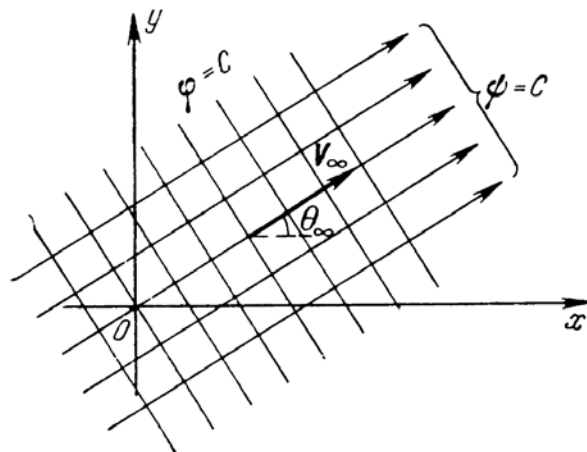


Рис. 3. Картина линий тока однородного потока

Данная характеристическая функция описывает однородный поступательный поток, текущий с постоянной скоростью U_{∞} под углом θ к положительному направлению оси x . В случае потока, текущего вдоль оси x , $w(z) = U_{\infty} z$.

Плоский источник и сток (рис. 4). Рассмотрим функцию

$$w(z) = a \ln z = a \ln r e^{i\theta} = a(\ln r + i\theta).$$

Определим потенциал и функцию тока течения, для чего выделим вещественную и мнимую части этой функции:

$$\varphi = a \ln r, \quad \psi = a\theta.$$

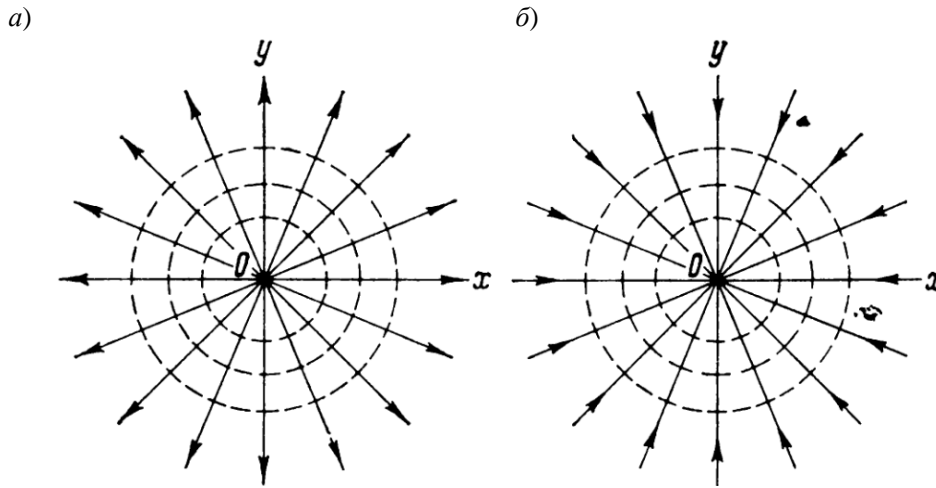


Рис. 4. Картина линий тока около источников (а) и стоков (б)

Из картины линий показанной на рис. 4 видно, что жидкость истекает радиально во все стороны из одной точки – начала координат, которая называется плоским источником.

Физический смысл постоянной a – расход жидкости:

$$a = Q/2\pi.$$

Таким образом, характеристическая функция плоского источника:

$$w = (Q/2\pi) \ln z.$$

Плоский циркуляционный поток. Рассмотрим характеристическую функцию

$$w = (b/i) \ln z.$$

Выделим в этом выражении потенциал и функцию тока, получим

$$w = \varphi + i\psi = (b/i) \ln(re^{i\theta}) = b\theta - i \ln r,$$

$$\varphi = b\theta, \quad \psi = -\ln r.$$

Линии тока представляют собой семейство концентрических окружностей с центром в начале координат (рис. 5).

Физический смысл постоянной b – циркуляция скорости по любому замкнутому контуру Γ , охватывающему начало координат: $b = \Gamma/2\pi$. С учётом этого характеристическая функция плоского циркуляционного потока:

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z.$$

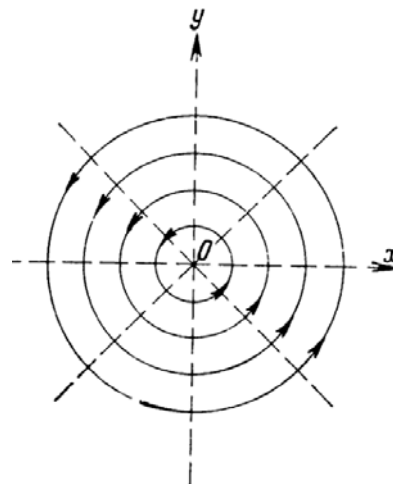


Рис. 5. Картина линий тока около плоского вихря

Плоский диполь. Расположим слева от начала координат на расстоянии $\Delta x/2$ (по оси x) источник с интенсивностью Q , а справа на том же расстоянии (по оси x) – сток с той же интенсивностью $-Q$. Сложим эти два потенциальных потока:

$$w = \frac{Q}{2\pi} \ln \left(z + \frac{\Delta x}{2} \right) - \frac{Q}{2\pi} \ln \left(z - \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Умножим и разделим правую часть этого выражения на Δx – расстоянием между источником и стоком, и совершим предельный переход при $\Delta x \rightarrow 0$. Будем считать, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{Q\Delta x}{2\pi} = \frac{M}{2\pi} = \text{const},$$

тогда

$$w = \frac{M}{2\pi} \frac{1}{z}.$$

Это течение называется плоским диполем (рис. 6). Величина M – момент диполя. Характеристическая функция диполя с осью, образующей угол α с отрицательным направлением оси x , представится в виде:

$$w = \frac{M}{2\pi} \frac{1}{z} e^{-i\alpha}.$$

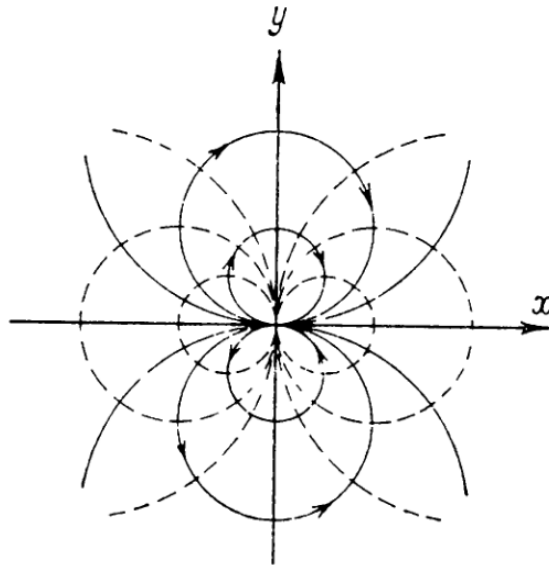


Рис. 6. Картина линий тока около диполя

Обтекание кругового цилиндра. Его можно получить сложением характеристических функций поступательного потока, текущего вдоль оси OX диполя с осью, направленной вдоль отрицательной оси OY и циркуляционного потока с центром в начале координат:

$$w = U_{\infty}z + \frac{M}{2\pi} \frac{1}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

Величины b , M и Γ считаются заданными постоянными. Выделяя в полярных координатах потенциал и функцию тока, получаем

$$\begin{aligned}\Phi &= \left(U_{\infty}r + \frac{M}{2\pi r} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \\ \Psi &= \left(U_{\infty}r - \frac{M}{2\pi r} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r.\end{aligned}$$

Вычислим радиальную составляющую скорости рассматриваемого потока:

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \left(U_{\infty} - \frac{M}{2\pi r^2} \right) \cos \theta.$$

Нормальная составляющая на поверхности цилиндра радиуса r_0 обращается в нуль, если $U - \frac{M}{2\pi r^2} = 0$, откуда $M = 2\pi r_0^2 U_{\infty}$.

Подставляя это значение момента диполя в выражение для w , получаем характеристическую функцию обтекания цилиндра с циркуляцией:

$$\begin{aligned}w &= U_{\infty} \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z, \\ \Phi &= U_{\infty} \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta.\end{aligned}$$

Потенциал обтекания цилиндра:

$$\Phi = U_{\infty}r \cos \theta + \frac{U_{\infty}r_0^2}{r} \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta.$$

Покажем, что потенциал соответствует обтеканию неподвижного кругового цилиндра радиусом r_0 потоком, имеющим на бесконечности скорость U_{∞} . Для этого достаточно показать, что во всех точках цилиндра $r = r_0$ радиальная составляющая скорости равна нормальной составляющей скорости U_r и равна нулю, т.е. на поверхности цилиндра выполняется условие непротекания:

$$U_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = U_{\infty}r \cos \theta - \frac{U_{\infty}r_0^2}{r^2} \cos \theta \Big|_{r=r_0}.$$

Касательная составляющая скорости потенциала Φ будет равна:

$$U_{\theta} = \frac{\partial \Phi}{r \partial \theta} = -U_{\infty} \sin \theta - \frac{U_{\infty}r_0^2}{r^2} \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}.$$

Исследуем картину линий тока при обтекании цилиндра с циркуляцией, для чего найдём положение критических точек на цилиндре, характеризуемых полярным углом θ .

В зависимости от величины циркуляции Γ возможны следующие варианты расположения критических точек, рассмотренные на рис. 7: циркуляция велика:

$\Gamma > 4\pi r_0 U_\infty$, $\sin \theta_k > 1$; промежуточный случай: $\Gamma = 4\pi r_0 U_\infty$, $\sin \theta = 1$, $\theta = \pi/2$; циркуляция мала: $\Gamma < 4\pi r_0 U_\infty$, $\sin \theta < 1$.

Для случая, когда циркуляция велика (рис. 7,а) тригонометрическое уравнение не имеет решения. Физически это означает, что критические точки на цилиндре отсутствуют – они переместились в области вне и внутри цилиндра. В зоне около цилиндра жидкость совершает замкнутое круговое движение. Для промежуточного случая (рис. 7,б) критические точки сливаются в одну, которая расположена на верхнем конце вертикального диаметра цилиндра. Для случая, когда циркуляция мала (рис. 7,в), решение уравнения даёт две лежащие на цилиндре критические точки, определяемые углами θ_1 и θ_2 . Эти точки симметричны относительно вертикального диаметра.

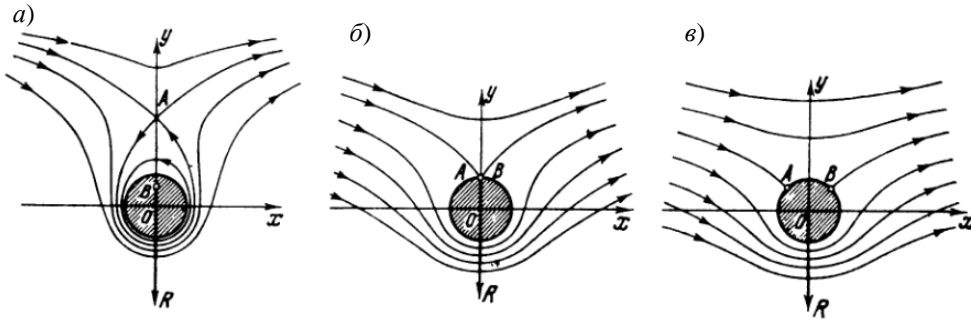


Рис. 7. Обтекание кругового цилиндра при различных значениях циркуляции

Рассмотрим более подробно наиболее интересный случай, когда $\Gamma < 4\pi r_0 U_\infty$. Из формулы для скорости цилиндра видно, что скорости в точках на верхней части цилиндра:

$$U_B = -|2U_\infty \sin \theta| + \frac{\Gamma}{2\pi r_0},$$

а на нижней части

$$U_H = |2U_\infty \sin \theta| + \frac{\Gamma}{2\pi r_0}.$$

Отсюда следует, что в симметричных относительно горизонтальной оси точках скорости на нижней части цилиндра больше, чем на верхней стороне $U_H > U_B$. Следовательно, на основании интеграла Эйлера давления на нижней части цилиндра больше, чем на верхней. Суммируя по поверхности тела, эти давления приводят к появлению вертикальной проекции силы.

Вычислим составляющие гидродинамической реакции на оси координат: силу сопротивления R_x и вертикальную силу R_y .

К элементу поверхности $dS = r_0 d\theta$ единичной высоты приложено избыточное гидродинамическое давление $(p - p_\infty)$. Элементарная сила давления:

$$d\vec{R} = -(p - p_\infty)\vec{n} dS.$$

Проекции на оси координат:

$$\begin{aligned} dR_x &= -(p - p_\infty)r_0 \cos \theta d\theta, \\ dR_y &= -(p - p_\infty)r_0 \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Отсюда, используя выражение для коэффициента давления, получаем

$$\begin{aligned} R_x &= -r_0 \frac{\rho U_\infty^2}{2} \int_0^{2\pi} \vec{p} \cos \theta d\theta, \\ R_y &= -r_0 \frac{\rho U_\infty^2}{2} \int_0^{2\pi} \vec{p} \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Определим коэффициент давления. Подставив вместо U его выражение, получим

$$p = 1 - \left(\frac{U}{U_\infty}\right)^2 - (1 - 4 \sin^2 \theta) + 2 \frac{\Gamma}{4\pi r_0 U_\infty} \sin \theta - 4 \left(\frac{\Gamma}{4\pi r_0 U_\infty}\right)^2.$$

Для частного бесциркуляционного течения ($\Gamma = 0$) $p = 1 - 4 \sin^2 \theta$.

Распределение коэффициента давления по верхней и нижней половине кругового цилиндра представлено на рис. 8. Из него видно, что отрицательные избыточные давления значительно превосходят по величине положительные.

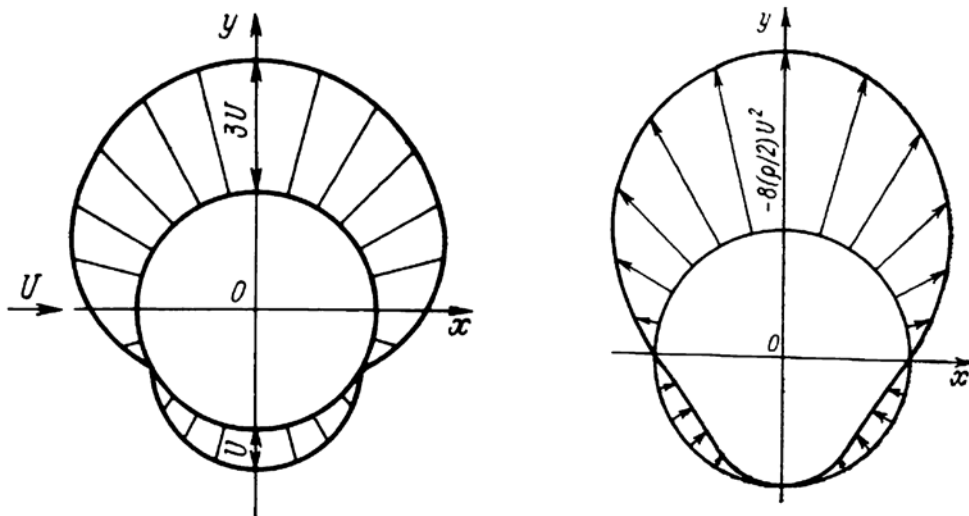


Рис. 8. Эпюры скоростей (слева) и давлений (справа) при обтекании цилиндра с циркуляцией

Для вертикальной силы R_y получим выражение

$$R_y = \rho U_\infty \Gamma.$$

Таким образом, вертикальная сила пропорциональна плотности жидкости, скорости набегающего потока и циркуляции. Её направление перпендикулярно скорости набегающего потока. Это есть теорема Жуковского о подъёмной силе профиля, которая здесь доказана для частного случая.

1.6.3. Метод конформных отображений для решения плоских потенциальных задач гидромеханики

Пусть z и ζ – две комплексные переменные, связанные между собой соотношением $z = f(\zeta)$, называемым отображаемой функцией (рис. 9). Каждой точке комплексной плоскости z соответствует определённая точка плоскости ζ , и наоборот. В этом случае говорят, что функция $z = f(\zeta)$ совершает взаимно однозначное конформное отображение области плоскости z на область w плоскости ζ и наоборот.

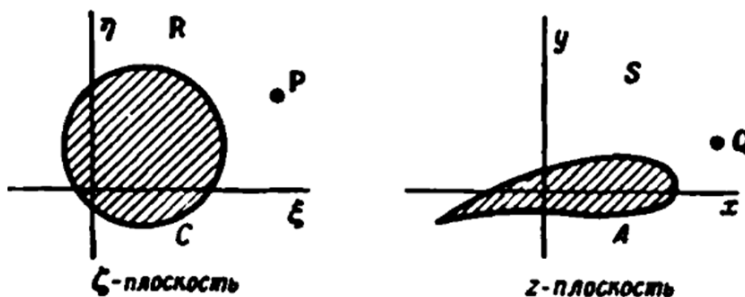


Рис. 9. Иллюстрация метода конформных отображений

Рассмотрим в плоскости z произвольный контур Γ_z . Пусть функция реализует отображение внешности контура Γ на внешность круга Γ_ζ в плоскости вспомогательного комплексного переменного ζ . При этом контур Γ преобразуется в круг. В свете этого конформное отображение можно рассматривать как своеобразное преобразование переменных.

Круг радиусом r_0 на плоскости ζ обтекается потоком, имеющим скорость на бесконечности под углом α . Характеристическая функция циркуляционного потока известна:

$$w(z) = U_\infty \zeta \left(\zeta e^{-i\alpha} + \frac{r_0^2}{\zeta} e^{i\alpha} \right) + \frac{\Gamma_\zeta}{2\pi i} \ln \zeta.$$

Так, решение задачи обтекания контура Γ даётся параметрическими зависимостями:

$$\begin{cases} w(z) = U_\infty \zeta \left(\zeta e^{-i\alpha} + \frac{r_0^2}{\zeta} e^{i\alpha} \right) + \frac{\Gamma_\zeta}{2\pi i} \ln \zeta, \\ z = f(\zeta). \end{cases}$$

В некоторых простейших случаях уравнение отображающей функции можно разрешить относительно переменной ζ , получив зависимость $\zeta = f(z)$. Тогда,

подставляя z в выражение для $w(\zeta)$, можно выразить характеристическую функцию обтекания контура Γ_ζ через z :

$$w(\zeta) = w[\Phi(z)] = U_\infty \zeta \left(\Phi(z) e^{-i\alpha} + \frac{r_0^2}{\Phi(z)} e^{i\alpha} \right) + \frac{\Gamma_\zeta}{2\pi i} \ln \Phi(z).$$

Метод конформных отображений находит широкое применение для решения плоских безвихревых задач гидромеханики.

Так, например, в 1910 г. немецкий физик Озеен рассматривал задачу об обтекании бесконечного цилиндра вязкой жидкостью, движущейся в поперечном к цилиндру направлении. Отнесённая к единице длины сила сопротивления при обтекании цилиндра для $Re \gg 1$, оказывается равной: $F = 0,48\rho U^2 D$.

1.6.4. Обтекание плоской пластины

Следует отметить, что при использовании так называемых эллиптических координат можно изучить обтекание эллиптического цилиндра, а в пределе, устремляя толщину цилиндра к нулю, получить обтекание пластины под малым углом атаки. Данная задача рассмотрена в [13], где получены следующие результаты:

– комплексная скорость:

$$\frac{dw}{dz} = w_\infty (\cos \alpha - i \cdot \sin \alpha \sqrt{\frac{z-a}{a+z}}),$$

где $z = x + iy$;

– подъёмная сила: $P = 2\pi\rho a |U_\infty|^2 |\sin \alpha|$; точка приложения центра давления (точка приложения подъёмной силы) расположена в точке $x = -a/2$.

Модель струйного обтекания тела потоком идеальной жидкости основывается на предположении, что поток не непрерывно обтекает всю поверхность находящегося в нем тела, а срывается с некоторой его части так, что за телом образуется так называемая застойная область, где скорость относительно тела $U = 0$, а следовательно, давление постоянно и равно давлению на бесконечности. При этом область, занятая жидкостью, разделяется на две области: область течения перед и вокруг тела и застойную область. Сорвавшийся с тела поток предполагается уходящим в бесконечность в виде струи, граница которой является границей застойной области. Так как в застойной области давление постоянно, то оно должно быть постоянно и на границе струи, а отсюда следует, что и величина скорости на границе струи также постоянна. При струйной модели обтекания поле скоростей (но не поле давлений) терпит разрыв на границе струи. Наличие такого разрыва приводит к образованию силы лобового сопротивления. В самом деле, на лобовой поверхности тела давление в ряде точек больше давления в задней части тела, в результате чего и образуется сила лобового сопротивления.

Данная задача была решена чисто из теоретических соображений Г. Гельмгольцем и Г.Р. Кирхгофом в 1868–1869 гг. – это первая задача струй идеальной жидкости. Форма свободных линий тока находилась в процессе решения задачи из условия постоянства во всех точках указанных свободных линий тока.

Рассматриваемое течение вязкой безграничной жидкости свободно ещё и от парадокса Эйлера–Даламбера, поскольку позволяет в безграничной невязкой жидкости при стационарном течении найти сопротивление рассматриваемой пластинки, которое является по своей природе сопротивлением давления или формы. Его величина, согласно аналитическому решению Гельмгольца,

$$c_{x0} = \frac{2\pi}{4 + \pi} \approx 0,880.$$

В 1876 г. Г.Р. Кирхгофом и лордом Рэлеем была решена задача о струйном стационарном обтекании наклонной пластинки и получена аналитически формула для коэффициента нормальной к поверхности пластинки силы:

$$c_N = \frac{2\pi \sin \alpha}{4 + \pi \sin \alpha}.$$

1.6.5. Обтекание цилиндра вязкой жидкостью

Особенно примечательное явление, связанное с переходом течения в пограничном слое из ламинарной формы в турбулентную, наблюдается при обтекании тела с тупой кормовой частью, например круглого цилиндра. При числах Рейнольдса порядка $5 \cdot 10^5$, коэффициент сопротивления цилиндра резко уменьшается, что объясняется возникновением в пограничном слое турбулентного течения.

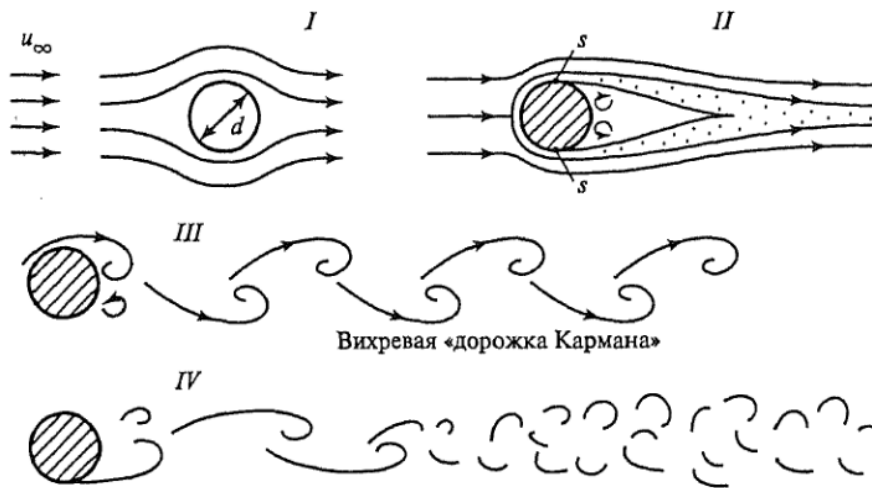
Турбулентность потока существенно влияет на обтекание цилиндра. С ростом турбулентности кризис обтекания, как правило, начинается при меньшей скорости. Эксперимент подтверждает теоретические соображения о смещении кризиса обтекания при увеличении турбулентности потока в сторону меньших чисел Рейнольдса.

На начало кризиса обтекания влияет шероховатость цилиндра. На основании анализа графиков этого влияния можно сделать следующие выводы:

- с ростом относительной шероховатости уменьшается значение Re , при котором начинается кризис, и протяжённость зоны скоростей, в которой происходит переход от докризисного режима к полному кризису.
- наличие шероховатости увеличивает значение c_x при полном кризисе обтекания и в переходной зоне к закризисному обтеканию.

В [5] была поставлена нестационарная задача и проведена верификация метода численного моделирования путём сравнения результатов расчёта с известными расчётными и экспериментальными данными. По рассчитанным местным коэффициентам давления и сопротивления трения вычислялись интегральные характеристики цилиндра: коэффициенты подъёмной силы c_y и аэродинамического сопротивления c_x . Было получено отношение числа Струхаля для рассматриваемых аэродинамических коэффициентов $Sh_x/Sh_y \approx 2$. Это соотношение служит вспомогательным критерием для оценки корректности результатов численного моделирования.

Качественная картина обтекания цилиндра. На примере обтекания цилиндра диаметром d рассмотрим разные режимы обтекания в зависимости от $Re_d = U_\infty d/\nu$ (рис. 10).



$Re = U_\infty d / \nu$: I - $Re \leq 5$; II - $Re = 5 - 50$; III - $Re = 50 - 5 \cdot 10^3$; IV - $Re > 5 \cdot 10^3$

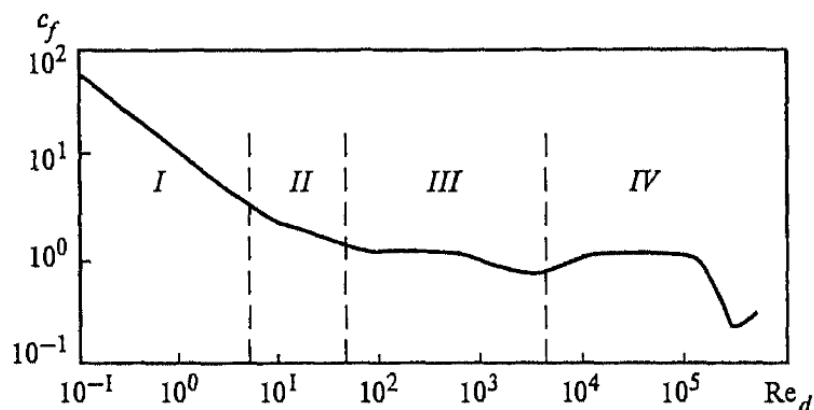


Рис. 10. Кривая коэффициента лобового сопротивления c_f при поперечном обтекании цилиндра, построенная по экспериментальным данным: I–IV – режимы обтекания

I режим: $Re \leq 5$ – ползущее течение; соответствует безотрывному обтеканию. Силами инерции можно пренебречь по сравнению с силами вязкости, влияние которой распространяется на всю область течения. Понятие пограничного слоя в данном случае неприменимо. Для этого режима в силу лобового сопротивления даёт вклад только сопротивление трения: $R_x = R_x^t$.

II режим: $5 \leq Re \leq 50$. В точке s происходит отрыв пограничного слоя. В кормовой части за точкой отрыва образуется застойная («мертвая») зона, в которой устойчиво существуют два симметричных стационарных вихря. Давление в кормовой части не возрастает, как при обтекании идеальной жидкостью, а остаётся низким. Вследствие этого наряду с сопротивлением трения становится очень существенным сопротивление формы: $R_x = R_x^t + R_x^p$.

III режим: $50 \leq Re \leq 5000$. Поочередно то из одной, то из другой области кормовой застойной зоны часть жидкости (вихрь) отрывается от цилиндра и движется вслед за потоком. Образуется вихревая дорожка Кармана (см. рис. 10). Частота отрыва вихрей f сначала возрастает с числом Re , а при $Re > 10^3$ становится постоянной и соответствует числу Струхала $Sh = 0,21$. Несмотря на сложную картину течения, оно остается упорядоченным, ламинарным. Сила лобового сопротивления складывается из сопротивления трения, формы, индуктивного (вихревого) сопротивления: $R_x = R_x^t + R_x^p + R_x^{инд}$.

Необходимо учитывать, что вихри отрываются под некоторым углом к продольной оси, поэтому возникающая при отрыве реактивная сила имеет отличную от нуля проекцию R_y поперек потока. Эта знакопеременная сила стремится раскачивать обтекаемое тело в поперечном направлении с некоторой частотой.

IV режим. При более высоких числах Рейнольдса упорядоченность дорожки Кармана нарушается и она турбулизируется, а при $Re > 2 \cdot 10^5$ в пограничном слое на поверхности тела происходит переход к турбулентному режиму. За счет турбулентного перемешивания импульс от внешнего потока передается в пограничный слой, скорости в пограничном слое возрастают, а профиль скорости становится более заполненным. Точка отрыва смещается вниз по потоку, вследствие чего «мёртвая зона» позади тела становится уже. Сопротивление формы снижается – это так называемый кризис сопротивления.

Ради наглядности приведём качественное объяснение формирования различных режимов течения в зависимости от числа Re , по картинам течения из альбома [8].

При малых числах Рейнольдса ($Re < 1$) обтекание цилиндра является ламинарным. Для числа $Re = 0,16$ (рис. 11) картина расположения линий тока с трудом позволяет определить, что поток движется слева направо. Это объясняется тем, что в пределе нулевого числа Рейнольдса обтекание твёрдого тела обратимо и, следовательно, симметрично при симметричной форме тела.

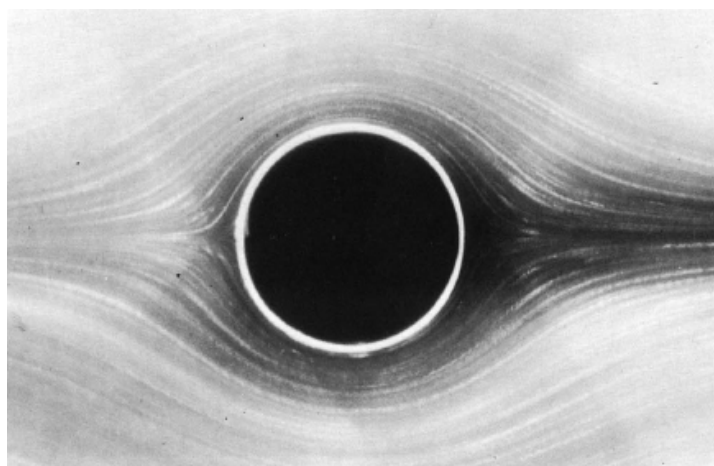


Рис. 11. Физическая картина обтекания цилиндра при $Re = 0,16$

Начиная со значения $Re = 1$ и вплоть до $Re \sim 40$ происходит нарушение устойчивости ламинарного потока. При $Re = 1,54$ (рис. 12) картина линий тока уже потеряла симметрию передней и задней части, которая имела место в предыдущем случае. Однако поток сзади ещё не оторвался. Отрыв начинается примерно при $Re = 5$.

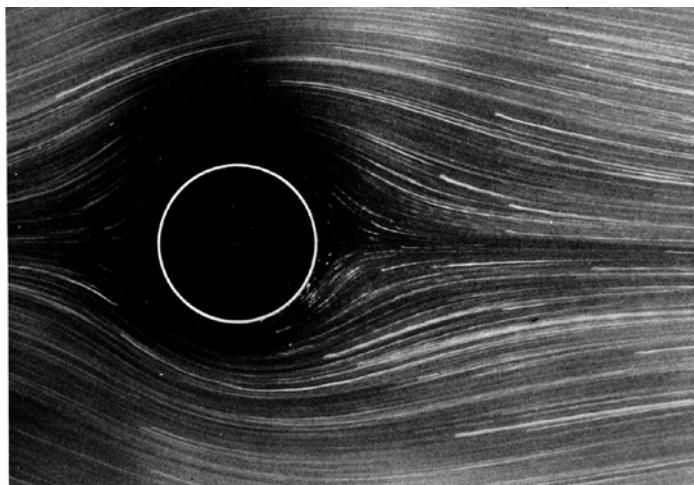


Рис. 12. Физическая картина обтекания цилиндра при $Re=1,54$

Новый тип развитого вихревого течения формируется при $Re > 10$. При этом за обтекаемым телом образуются два вихря, однако течение остаётся стационарным и ламинарным. В противоположность предыдущему случаю на рисунках ясно видно, что произошёл отрыв и образовалась пара рециркуляционных вихрей. На рис. 13 показана картина физического обтекания цилиндра при $Re = 9,6$, а на рис. 14 – при $Re = 13,1$.

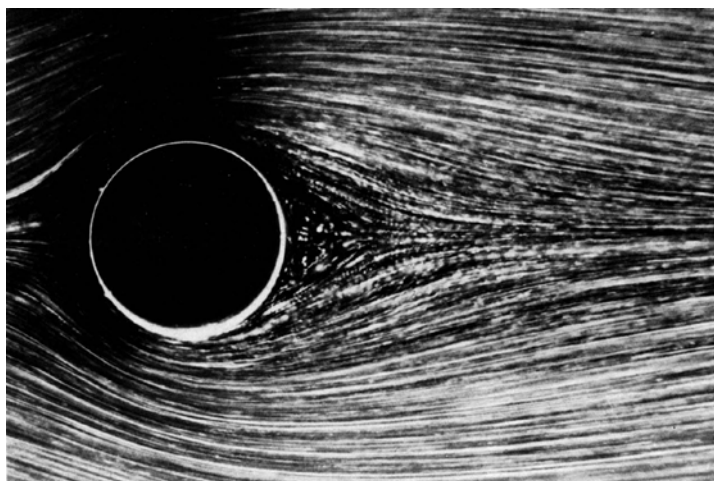


Рис. 13. Физическая картина обтекания цилиндра при $Re=9,6$

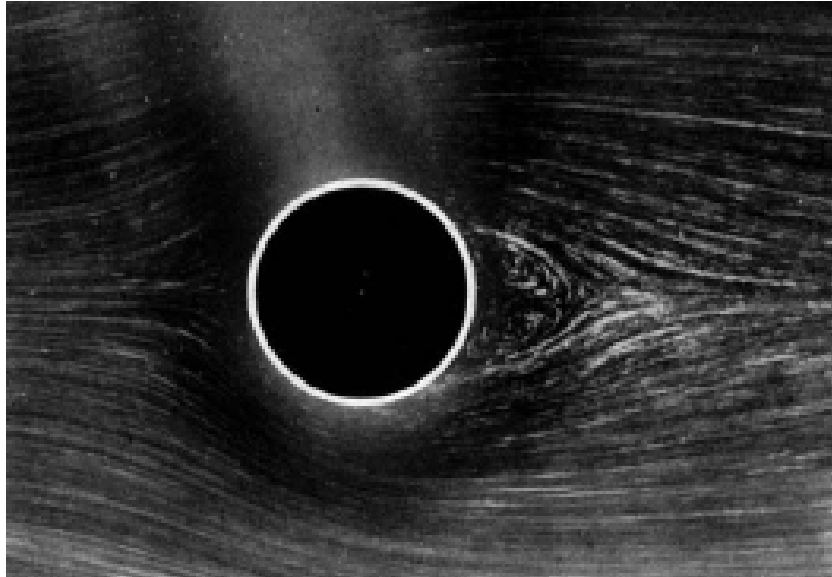


Рис. 14. Физическая картина обтекания цилиндра при $Re=13,1$

По мере увеличения скорости неподвижные вихри начинают вытягиваться в направлении потока. Их длина линейно растёт с ростом Re , пока течение не становится неустойчивым при значении Re , превышающем 40. Расстояние вниз по потоку до центров вихрей также возрастает с ростом числа Рейнольдса. Эта картина примерно соответствует верхнему пределу для существования установившегося течения. Далеко вниз по потоку след уже начал совершать синусоидальные колебания.

На рис. 15 показана физическая картина обтекания цилиндра при $Re=26$, а на рис. 16 – при $Re=41$.

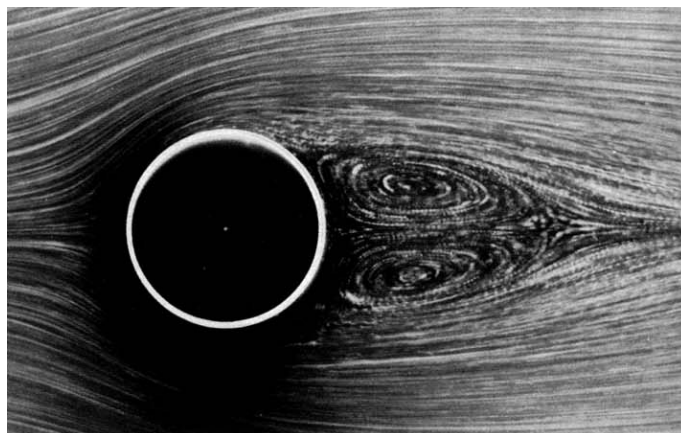


Рис. 15. Физическая картина обтекания цилиндра при $Re=26$

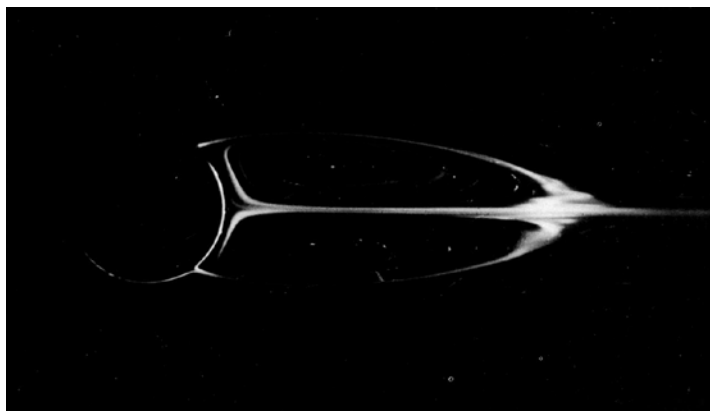


Рис. 16. Физическая картина обтекания цилиндра при $Re=41$

При дальнейшем увеличении числа Re описанное выше стационарное движение с образованием в задней области течения системы из двух симметричных вихрей теряет устойчивость. При этом один из вихрей удлиняется, отрывается и сносится вниз по потоку жидкости. Затем удлиняется и отрывается другой. На смену оторвавшимся вихрям возникают попеременно сверху и снизу новые вихри, которые также отрываются от цилиндра и уносятся вместе с потоком. Такой режим неустойчивости образуется чаще всего. В результате образуется так называемая вихревая дорожка Кармана, движение становится нестационарным, но периодическим.

Для больших чисел Рейнольдса $Re \gg 1000$ вихри уже не успевают сформироваться и заменяются вниз по потоку быстро турбулизирующимися областями, попеременно отрывающимися от цилиндра и уходящими вместе с жидкостью. В области значений $Re \sim 10^3 \dots 10^4$ течение становится все более нерегулярным, что приводит к увеличению турбулизации потока за цилиндром. При этом отдельные частицы закручиваются во всех трёх измерениях, и задача перестаёт быть плоской. На рис. 17 показана физическая картина обтекания цилиндра при $Re=2000$.

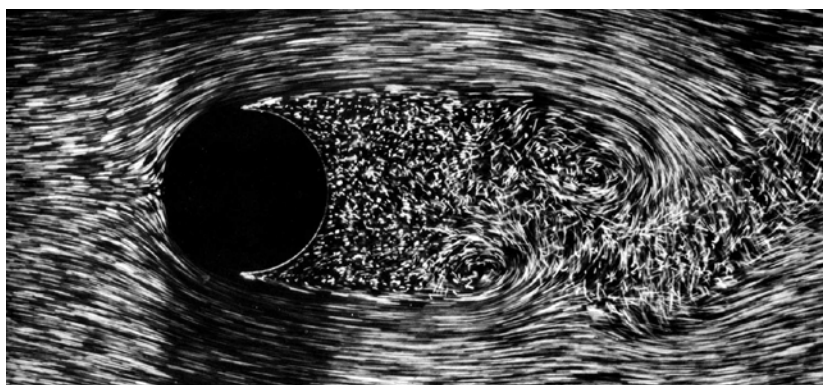


Рис. 17. Физическая картина обтекания цилиндра при $Re=2000$

При скорости, в пять раз превышающей скорость потока в предыдущем случае, картина течения не претерпевает серьёзных изменений. Коэффициент сопротивления остаётся почти постоянным в диапазоне. Этот коэффициент снижается позднее, когда пограничный слой становится турбулентным уже в месте отрыва.

При $Re = 100000$ область турбулентности распространяется вплоть до поверхности цилиндра. За цилиндром возникает так называемый турбулентный след (рис. 18).

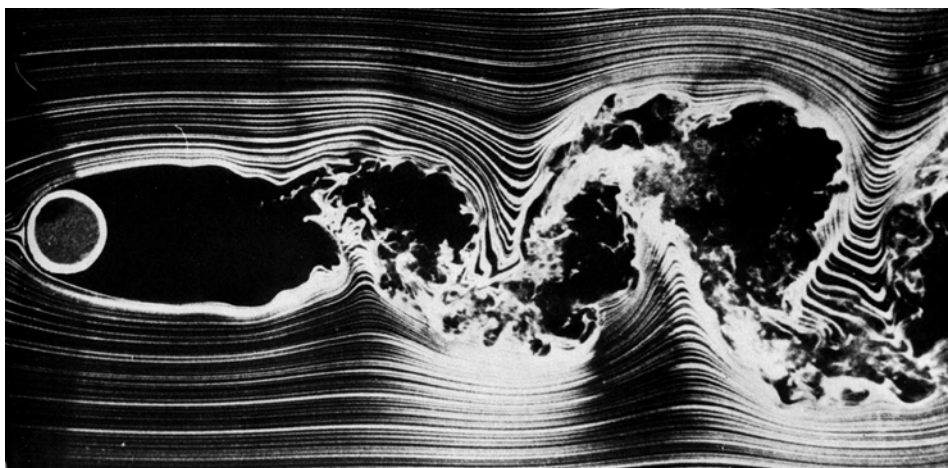


Рис. 18. Физическая картина обтекания цилиндра при $Re=10000$

1.7. Теория крыла при решении задач гидроаэромеханики

1.7.1. Возникновение подъёмной силы на крыле

При обтекании твёрдого тела поток подвергается деформации, что приводит к изменению скорости, давления, температуры и плотности в струйках потока. Таким образом, около поверхности обтекаемого тела создаётся область переменных скоростей и давлений среды. Наличие различных по величине давлений у поверхности твёрдого тела приводит к возникновению аэродинамических сил и моментов. Распределение этих сил зависит от характера обтекания тела, его положения в потоке, конфигурации тела.

Так, симметричное хорошо обтекаемое тело имеет плавный характер обтекания как в передней, так и в хвостовой части. В носовой части наблюдается наибольшая деформация струек, наибольшее их поджатие, в хвостовой образуются небольшие завихрения потока, которые создают спутную струю и уносятся потоком, постепенно затухая.

Хорошо обтекаемое несимметричное тело по характеру обтекания близко к хорошо обтекаемому симметричному и отличается величиной деформации струек в верхней и нижней частях тела. Наибольшая деформация наблюдается там, где искривление поверхности тела имеет наибольшую величину.

При обтекании потоком симметричных (и несимметричных) хорошо обтекаемых тел, помещённых под некоторым углом α к вектору скорости невозмущённого потока, также будем иметь картину несимметричного обтекания. На верхней поверхности тела, в месте наибольшего поджатия струй будет наблюдаться местное увеличение скорости потока и, следовательно, уменьшение давления. На нижней поверхности деформация потока будет меньше и, следовательно, меньше изменение скорости и давления. Степень деформации струек будет зависеть от конфигурации тела и его положения в потоке. Можно для каждой его точки подсчитать величину давления и таким образом судить о величинах и характере действия аэродинамических сил. Так как на различные точки поверхности обтекаемого тела (профиля крыла) действуют разные по величине силы давления, результирующая их будет отлична от нуля. Это различие давлений в разных точках поверхности движущегося крыла является основным фактором, обуславливающим появление аэродинамических сил.

Кроме сил давления, на поверхность крыла по касательной к ней действуют силы трения, которые обусловлены вязкостью и целиком определяются процессами, происходящими в пограничном слое. Суммируя распределённые по поверхности крыла силы давления и трения, получим равнодействующую силу, которая называется полной аэродинамической силой. Точка приложения полной аэродинамической силы на хорде профиля крыла называется центром давления.

В наиболее упрощённом виде поток, обтекающий крыло, можно представить как потенциальное течение с циркуляцией. Этот поток получается из обычного потенциального потока без циркуляции путём наложения на последний циркуляционного потока. С циркуляцией тесно связано возникновение подъёмной силы крыла. При наложении циркуляционного потока на обычный потенциальный скорость последнего над крылом увеличивается, а под крылом, наоборот, уменьшается. Согласно уравнению Бернулли это означает, что над крылом давление уменьшается, а под крылом увеличивается, следовательно, возникает сила, действующая на крыло снизу вверх, т.е. подъёмная сила. Н.Е. Жуковский теоретическим путём показал, что подъёмная сила крыла прямо пропорциональна циркуляции.

С точки зрения теории наиболее простым случаем является обтекание крыла бесконечного размаха. Практически условия обтекания такого крыла осуществляются на крыле конечного размаха, вплотную прилегающем своими боковыми концами к двум параллельным стенкам при отсутствии на них трения. Установившееся движение жидкости без трения около такого крыла представляет собой потенциальное течение с циркуляцией. На этой теории основано большое число расчётных методов, использующих метод конформного отображения, первые из которых разработаны Жуковским и Кутта. В этих методах теоретическое лобовое сопротивление равно нулю, так как действительное лобовое сопротивление в основном обусловлено трением. Действительная подъёмная сила несколько меньше теоретической, что также объясняется трением, влияние которого равносильно небольшому уменьшению угла атаки (пограничный слой на верхней стороне крыла по мере приближения к его задней кромке утолщается, это уменьшает циркуляцию, что равносильно уменьшению угла атаки).

Наряду с перечисленными способами расчёта обтекания крыла разработаны приближенные способы, основанные на замене крыла системой вихрей, расположенных в горизонтальной плоскости. Этот способ, который может быть применён также к трёхмерным задачам, для двумерных задач даёт особенно простые соотношения. Так, например, для зависимости коэффициента подъёмной силы от угла атаки получается следующая формула:

$$c_y = 2 \cdot \pi \cdot \left(\alpha + \frac{2 \cdot f}{b} \right),$$

где b – хорда профиля, м; f – максимальная вогнутость средней линии, принимаемой за дугу окружности.

1.7.2. Геометрические характеристики крыла

Геометрические характеристики крыла сводятся в основном к характеристикам формы крыла в плане и профиля крыла (рис. 19). Крылья по форме в плане могут быть эллипсовидные, прямоугольные, трапециевидные, стреловидные, треугольные. Форма крыла в плане характеризуется размахом, площадью, удлинением.

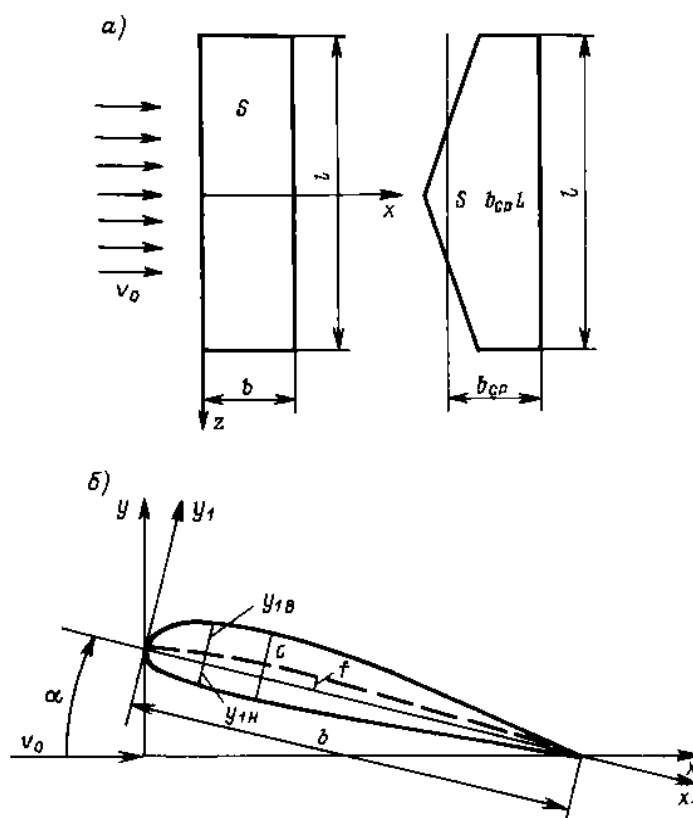


Рис. 19. Основные характеристики крыла

Размахом крыла L называется расстояние между концами крыла по прямой линии. Площадь крыла в плане S ограничена контурами крыла. Площадь трапециевидного и стреловидного крыльев вычисляют как $S = L \cdot b_{\text{ср}}$, где $b_{\text{ср}}$ – средняя хорда крыла, м.

Удлинением крыла λ называется отношение размаха крыла к средней хорде: $\lambda = \ell / b_{\text{ср}}$.

Профилем крыла называется форма его поперечного сечения. Профили могут быть симметричными и несимметричными. Несимметричные в свою очередь могут быть двояковыпуклыми, плосковыпуклыми, вогнуто-выпуклыми и S-образными. Основными характеристиками профиля являются хорда профиля, относительная толщина, относительная кривизна.

Хордой профиля b называется отрезок прямой, соединяющий две наиболее удалённые точки профиля.

Относительной толщиной профиля c называется отношение максимальной толщины c_{max} к хорде, выраженное в процентах:

$$c = \frac{c_{\text{max}}}{b} \cdot 100\%.$$

Относительной кривизной профиля f называется отношение максимальной кривизны f к хорде, выраженное в процентах. Максимальное расстояние от средней линии профиля до хорды определяет кривизну профиля. Средняя линия профиля проводится на равном расстоянии от верхнего и нижнего обводов профиля.

$$f = \frac{f_{\text{max}}}{b} \cdot 100\%.$$

1.7.3. Лобовое сопротивление крыла

Сопротивление движению складывается из профильного и индуктивного сопротивлений: $X = X_{\text{пр}} + X_{\text{инд}}$, где $X_{\text{пр}}$ – профильное сопротивление, Н, $X_{\text{инд}}$ – индуктивное сопротивление, Н.

Профильное сопротивление складывается из сопротивления давления и сопротивления трения:

$$X_{\text{пр}} = X_{\text{д}} + X_{\text{тр}}.$$

Сопротивление давления – это разность давлений перед и за крылом. Чем больше эта разность, тем больше сопротивление давления. Разность давлений зависит от формы профиля, его относительной толщины и кривизны. Чем больше относительная толщина профиля, тем больше повышается давление перед крылом и уменьшается за крылом на его задней кромке. В результате увеличиваются разность давлений и сопротивление давления. Если обтекание потоком крыла происходит без отрыва пограничного слоя со всей поверхности профиля крыла, то сопротивление давления возникает из-за разности давлений передней части крыла и задней. При этом образуются слабые вихри в спутной струе. При обте-

кании профиля крыла потоком на углах атаки, близких к критическому, сопротивление давления значительно возрастает. При этом размеры завихрённой спутной струи и самих вихрей резко увеличиваются.

Сопротивление трения возникает вследствие вязкости в пограничном слое, обтекающем профиль крыла. Величина сил трения зависит от структуры пограничного слоя и состояния обтекаемой поверхности крыла (его шероховатости). В ламинарном пограничном слое сопротивление трения меньше, чем в турбулентном. Следовательно, чем большую часть поверхности крыла обтекает ламинарный пограничный слой потока, тем меньше сопротивление трения, на величину которого влияют скорость потока, шероховатость поверхности, форма крыла. Чем больше скорость, чем хуже обработана поверхность крыла и толще его профиль, тем больше сопротивление трения. Соотношение между сопротивлением трения и сопротивлением давления в большой степени зависит от толщины профиля.

Индуктивное сопротивление – это прирост лобового сопротивления, связанный с образованием подъёмной силы крыла. При обтекании крыла невозмущённым потоком возникает разность давлений над крылом и под ним. В результате часть воздуха или жидкости на концах крыльев перетекает из зоны большего давления в зону меньшего давления. Поток перетекает с нижней поверхности крыла на верхнюю и накладывается на поток, набегающий на верхнюю часть крыла, что приводит к образованию завихрений за задней кромкой – образуется вихревой жгут, в котором вращается воздух или жидкость. Скорость вращения вихревого жгута различна, в центре она наибольшая, а по мере удаления от оси вихря уменьшается. Вихревые жгуты левого и правого полукрыльев вращаются в разные стороны таким образом, что в пределах крыла движение масс направлено сверху вниз. Такое движение сообщает потоку, обтекающему крыло, дополнительную скорость, направленную вниз. При этом любая часть потока, обтекающая крыло со скоростью U , отклоняется вниз со скоростью ΔU . Величина этой скорости обратно пропорциональна расстоянию точки от оси вихревого жгута, т.е. в конечном счёте от удлинения крыла, от разности давлений над и под крылом, и от формы крыла в плане.

Угол $\Delta\alpha$, на который отклоняется поток, обтекающий крыло со скоростью U , наведённой вертикальной скоростью ΔU , называется углом скоса потока. Величина его зависит от значения вертикальной скорости, индуцированной вихревым жгутом, и скорости набегающего потока:

$$\operatorname{tg} \Delta\alpha \approx \Delta\alpha = \frac{\Delta U}{U}.$$

Поэтому благодаря скосу потока истинный угол атаки крыла $\alpha_{\text{ист}}$ в каждом его сечении будет отличаться от геометрического или кажущегося угла атаки $\alpha_{\text{каж}}$ на величину $\Delta\alpha$:

$$\alpha_{\text{ист}} \approx \alpha_{\text{каж}} - \Delta\alpha = \alpha_{\text{каж}} - \frac{\Delta U}{U}.$$

Как известно, подъёмная сила крыла Y всегда перпендикулярна направлению набегающего потока. Подъёмной силой будет не вся сила Y' , а её составляющая Y , направленная перпендикулярно набегающему потоку:

$$Y = Y' \cos \Delta\alpha \approx Y'.$$

Ввиду малости величины $\Delta\alpha$ считаем $\cos \Delta\alpha \approx 1$. Другая составляющая Y' будет равна:

$$X_1 = Y' \operatorname{tg} \Delta\alpha \approx Y' \Delta\alpha.$$

Эта составляющая направлена по потоку и называется индуктивным сопротивлением.

1.7.4. Аэродинамическое качество крыла и поляра крыла

С точки зрения аэрогидромеханики крыла наиболее выгодным будет такое крыло, которое обладает способностью создавать возможно большую подъёмную силу при возможно меньшем лобовом сопротивлении. Для оценки аэродинамического совершенства крыла вводится понятие «аэродинамическое качество крыла».

Аэродинамическим качеством крыла называется отношение подъёмной силы к силе лобового сопротивления крыла на данном угле атаки: $K = Y/X$, где Y – подъёмная сила, Н; X – сила лобового сопротивления, Н. Подставив сюда значения Y и X , получим $K = c_y/c_x$.

Чем больше аэродинамическое качество крыла, тем оно совершеннее. Аэродинамическое качество характеризуется углом θ : $\operatorname{tg} \theta = X/Y$, или $\operatorname{tg} \theta = 1/K$.

Угол θ между векторами подъёмной и полной аэродинамической сил называется углом качества. Чем больше аэродинамическое качество, тем меньше угол качества, и наоборот. Аэродинамическое качество крыла зависит от угла атаки, формы профиля, формы крыла в плане и от обработки поверхности.

По известным значениям аэродинамических коэффициентов c_x и c_y для различных углов атаки строят график $K = f(\alpha)$. С увеличением угла атаки до определённой величины аэродинамическое качество возрастает. При некотором угле атаки качество достигает максимальной величины K_{\max} . Этот угол называется наивыгоднейшим углом атаки $\alpha_{\text{наив}}$. На угле атаки нулевой подъёмной силы α_0 коэффициент силы c_y равен нулю, аэродинамическое качество также будет равно нулю. Для получения больших значений K выбираются оптимальные толщина и кривизна профиля, формы обводов и удлинение крыла.

Для различных расчётов характеристик крыла особенно важно знать одновременное изменение c_x и c_y в диапазоне углов атаки. Для этой цели строится график зависимости коэффициента c_y от c_x , называемый полярой. Для построения поляры для данного крыла, крыло (или его модель) продувается в аэродинамической трубе при различных углах атаки. При продувке для каждого угла атаки аэродинамическими весами измеряются величины подъёмной силы Y и лобового сопротивления X . Определив величины сил для данного профиля, вычисляют их аэродинамические коэффициенты. Из формулы подъёмной силы и силы лобового сопротивления находим

$$c_x = \frac{X}{\frac{\rho U^2}{2} \cdot S}, \quad c_y = \frac{Y}{\frac{\rho U^2}{2} \cdot S}.$$

Такой расчёт производится для каждого угла атаки. Результаты замеров и вычислений заносят в таблицу. Для построения поляры проводят две взаимно перпендикулярные оси. На вертикальной оси откладывают значения c_y , на горизонтальной – c_x . Поляра строится для вполне определённого крыла с заданными геометрическими размерами и формой профиля. По поляре можно определить ряд характерных углов атаки.

Угол нулевой подъёмной силы α_0 находится на пересечении поляры с осью c_x . При этом угле атаки коэффициент подъёмной силы равен нулю.

Так как на наивыгоднейшем угле атаки аэродинамическое качество крыла максимальное, то угол между осью c_y и касательной, проведённой из начала координат, т.е. угол качества θ , на этом угле атаки будет минимальным. Поэтому для определения $\alpha_{наив}$ нужно провести из начала координат касательную к поляре. Точка касания будет соответствовать $\alpha_{наив}$.

Для определения критического угла атаки необходимо провести касательную к поляре, параллельную оси c_x . Точка касания и будет соответствовать $\alpha_{крит}$.

2. ГИДРОМЕХАНИКА ПОДВОДНОГО АППАРАТА

В настоящее время созданы многочисленные научно-исследовательские, аварийно-спасательные, рабочие, промысловые и другие аппараты, существенно различающиеся по внешним, массогабаритным данным, а также по принципу движения, стабилизации и управления. Несмотря на большое разнообразие ПА, их объединяет одно общее свойство - способность достаточно свободно перемещаться в воде. Решение вопросов о плавании под водой различных аппаратов основывается на некоторых общих принципах обеспечения их равновесия или движения в заданном направлении. Основы теории движения являются общими для всех аппаратов.

Все возможные состояния подводного аппарата обусловлены действующими на него силами. Только имея полные сведения об этих силах и располагая средствами управления ими, можно определить условия, при которых возможны все динамические состояния ПА, удовлетворяющие предъявляемым требованиям. Решение всех этих вопросов дают различные разделы механики, теории корабля и динамики подводных аппаратов. Вместе с тем конкретные методы в приложении к средствам подводного перемещения имеют свою специфику.

Форма и габариты ПА должны обеспечивать выполнение требований жизнедеятельности экипажа, размещения оборудования и аппаратуры. Для безопасного плавания ПА должен быть на всех режимах надёжно стабилизирован, что обеспечивается техническими средствами различной эффективности и сложности, выбор которых производится в зависимости от формы аппарата. Форма корпуса влияет также на гидродинамические силы, обусловленные наличием движителей, расположенных либо стационарно на корпусе, либо на поворотных колонках. Взаимодействие корпуса с движителями, а также расчёт сил, создаваемых дви-

жителями, составляют самостоятельную задачу. Стабилизаторы и рули являются органами уравнивания и стабилизации сил, действующих как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскостях. Выбор стабилизаторов и рулей связан с проведением специальных расчётов.

2.1. Параметры, используемые при описании движения ПА

Движение ПА характеризуется динамическими и кинематическими составляющими.

Кинематическими параметрами при движении ПА являются вектора скорости и угловой скорости, которые можно выразить через их проекции на связанные оси ПА:

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}, \quad \vec{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix},$$

где \vec{V} – вектор скорости ПА, м/с; $\vec{\Omega}$ – вектор угловой скорости ПА, рад/с; V_x, V_y, V_z – проекции вектора скорости на связанные оси, м/с; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции вектора угловой скорости на связанные оси, рад/с.

Важнейшим моментом для вывода уравнений движения ПА является использование различных систем координат (СК).

Основные системы координат ПА (рис. 20):

- 1) базовая земная СК $A\xi\eta\zeta$. Неподвижная;
- 2) полусвязанная СК $Ox_1y_1z_1$. Подвижная, перемещается вместе с подводным объектом с началом в центре масс. При этом оси этой системы имеют фиксированное положение – либо параллельны осям базовой СК, либо повернуты на фиксированный курсовой угол;

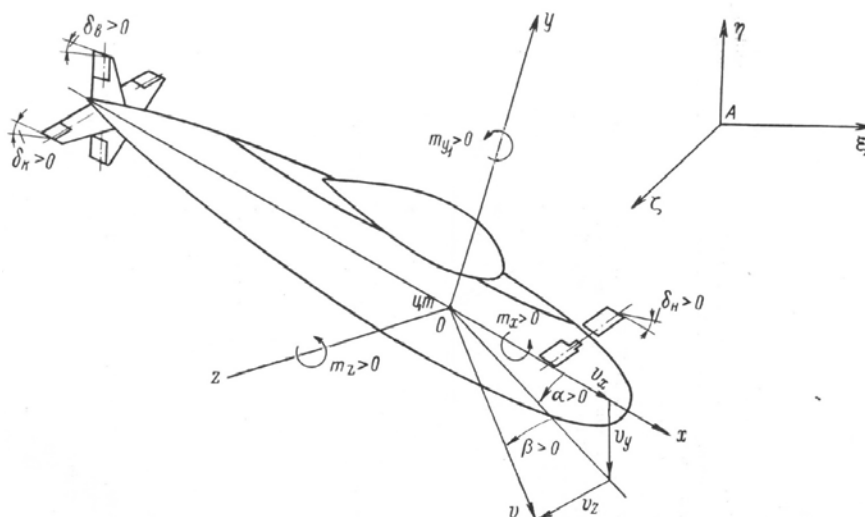


Рис. 20. Координатные оси, знаки углов атаки, дрейфа и перекладки рулей

3) связанная система координат $OXYZ$. Подвижная, жестко связана с центром масс подводного объекта и перемещается вместе с ним в пространстве. Продольная ось OX и нормальная ось OY лежат в продольной плоскости симметрии ПА. Ось OX направлена в нос, ось OY – вертикально вверх. Ось OZ образует с этими осями правую систему координат. Данная СК используется для получения уравнений динамики ПА.

Ориентация ПА в пространстве в любой момент времени определяется взаимным расположением связанной СК и полусвязанной, которое характеризуется углами Эйлера:

– угол рыскания (курса) φ – угол между проекцией связанной оси OX на горизонтальную плоскость и осью OX_1 ;

– угол дифферента ψ – угол между связанной осью OX и горизонтальной плоскостью;

– угол крена θ – угол между продольной плоскостью симметрии подводного объекта и вертикальной плоскостью, содержащей связанную ось OX .

По отношению к подвижной СК вектор скорости может занимать произвольное положение. При этом используют соотношения, связывающие значение вектора скорости с его проекциями через углы.

$$\begin{cases} V_x = V \cos \beta \cos \alpha, \\ V_y = -V \cos \beta \sin \alpha, \\ V_z = V \sin \beta, \end{cases}$$

где α – угол атаки (угол между проекцией вектора скорости на продольную плоскость и связанной осью OX), рад.; β – угол дрейфа (угол между вектором скорости и продольной плоскостью подводного объекта), рад.

Кинематическими параметрами текущего положения ПА служат координаты его центра масс в базовой системе координат $\xi\eta\zeta$, которые характеризуются вектором скорости ПА \vec{V}_g .

Результаты экспериментального определения аэрогидродинамических сил и моментов представляются в поточной СК в виде зависимости безразмерных коэффициентов этих сил c_x, c_y, c_z и моментов m_x, m_y, m_z от углов атаки α и дрейфа β .

2.2. Интегральные (осреднённые) гидродинамические характеристики (ГДХ)

Главный вектор системы сил, действующих на обтекаемое тело со стороны окружающей среды (воды), принято называть гидродинамической силой \vec{R} , а главный момент – гидродинамическим моментом \vec{M} . Составляющие этих величин:

– гидродинамическая продольная сила X – составляющая гидродинамической силы \vec{R} по оси OX связанной СК $OXYZ$, взятая с противоположным знаком;

– гидродинамическая нормальная сила Y – составляющая гидродинамической силы \vec{R} по оси OY связанной системы координат $OXYZ$;

– гидродинамическая поперечная сила Z – составляющая гидродинамической силы \vec{R} по оси OZ связанной СК $OXYZ$;

- сила лобового сопротивления X_a – составляющая гидродинамической силы \vec{R} по оси OX_a скоростной СК $OX_aY_aZ_a$, взятая с противоположным знаком;
- гидродинамическая подъёмная сила Y_a – составляющая гидродинамической силы \vec{R} по оси OY_a скоростной СК $OX_aY_aZ_a$;
- гидродинамическая боковая сила Z_a – составляющая гидродинамической силы \vec{R} по оси OZ_a скоростной СК $OX_aY_aZ_a$;
- гидродинамический момент крена M_x – составляющая гидродинамического момента \vec{M} по оси OX связанной СК $OXYZ$;
- гидродинамический момент рыскания M_y – составляющая гидродинамического момента \vec{M} по оси OY связанной СК $OXYZ$;
- гидродинамический момент дифферента M_z – составляющая гидродинамического момента \vec{M} по оси OZ связанной СК $OXYZ$;
- гидродинамический момент крена в скоростной СК M_{x_a} – составляющая гидродинамического момента \vec{M} по оси OX_a скоростной СК $OX_aY_aZ_a$;
- гидродинамический момент рыскания в скоростной СК M_{y_a} – составляющая гидродинамического момента \vec{M} по оси OY_a скоростной СК $OX_aY_aZ_a$;
- гидродинамический момент дифферента в скоростной СК M_{z_a} – составляющая гидродинамического момента \vec{M} по оси OZ_a скоростной СК $OX_aY_aZ_a$.

На практике в качестве ГДХ используют не сами силы и моменты, а их коэффициенты. Это позволяет рассматривать их безотносительно к конкретным свойствам среды, геометрическому масштабу и скорости движения. Коэффициенты перечисленных выше сил и моментов определяются следующим образом:

$$c_x = \frac{X}{qS}, \quad c_y = \frac{Y}{qS}, \quad c_z = \frac{Z}{qS}, \quad m_x = \frac{M_x}{qW}, \quad m_y = \frac{M_y}{qW}, \quad m_z = \frac{M_z}{qW},$$

$$c_{x_a} = \frac{X_a}{qS}, \quad c_{y_a} = \frac{Y_a}{qS}, \quad c_{z_a} = \frac{Z_a}{qS}, \quad m_{x_a} = \frac{M_{x_a}}{qW}, \quad m_{y_a} = \frac{M_{y_a}}{qW}, \quad m_{z_a} = \frac{M_{z_a}}{qW},$$

где $q = \rho U^2/2$ – скоростной напор, Па; S – характерная площадь, м²; W – характерный объём, м³; ρ – плотность среды, кг/м³.

Определённые в таком виде ГДХ являются безразмерными, а их названия образуют добавлением слова «коэффициент» к названию соответствующей силы или момента, например, «коэффициент гидродинамического момента крена в скоростной системе координат».

В качестве характерной площади могут брать значения смоченной поверхности, площади характерного сечения, объёма тела в степени 2/3 ($W^{2/3}$).

2.3. Уравнения движения ПА

Силы и моменты, действующие на ПА, характеризуют его динамику. Действие всех сил и моментов можно описать через теорему об изменении количества движения и количества момента:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}, \\ \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \end{cases} \quad (8)$$

где \vec{K} – главный вектор количества движения, кг·м/с; \vec{L} – главный вектор момента количества движения, м²·кг/с; \vec{F} – главный вектор внешних сил, Н; \vec{M} – главный вектор момента внешних сил относительно начала выбранной системы координат, Н·м.

Запись уравнения (8) в связанной системе координат принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{K}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{K} = \vec{F}, \\ \frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{L} + \vec{V} \times \vec{K} = \vec{M}. \end{cases} \quad (9)$$

Перепишем (9) в виде проекций сил и моментов на оси связанной СК:

$$\begin{cases} \frac{dK_x}{dt} + \omega_y K_z - \omega_z K_y = F_x, \\ \frac{dK_y}{dt} + \omega_z K_x - \omega_x K_z = F_y, \\ \frac{dK_z}{dt} + \omega_x K_y - \omega_y K_x = F_z, \\ \frac{dL_x}{dt} + \omega_y L_z - \omega_z L_y + V_y K_z - V_z K_y = M_x, \\ \frac{dL_y}{dt} + \omega_z L_x - \omega_x L_z + V_z K_x - V_x K_z = M_y, \\ \frac{dL_z}{dt} + \omega_x L_y - \omega_y L_x + V_x K_y - V_y K_x = M_z. \end{cases} \quad (10)$$

Система уравнений (10) полностью описывает динамику ПА и является основным уравнением сил и моментов, действующих на данный объект.

Гидродинамические силы и моменты, возникающие при движении ПА, в общем случае являются нелинейными функциями кинематических параметров угла атаки α , угла дрейфа β , вектора угловой скорости Ω , углов перекаладки рулей δ :

$$\begin{cases} F_x = \frac{\rho W^{2/3}}{2} c_x(\alpha, \beta, \Omega, \delta) V^2, \\ F_y = \frac{\rho W^{2/3}}{2} c_y(\alpha, \beta, \Omega, \delta) V^2, \\ F_z = \frac{\rho W^{2/3}}{2} c_z(\alpha, \beta, \Omega, \delta) V^2, \end{cases} \quad \begin{cases} M_x = \frac{\rho W}{2} m_x(\alpha, \beta, \Omega, \delta) V^2, \\ M_y = \frac{\rho W}{2} m_y(\alpha, \beta, \Omega, \delta) V^2, \\ M_z = \frac{\rho W}{2} m_z(\alpha, \beta, \Omega, \delta) V^2, \end{cases}$$

где V – полный вектор скорости хода ПА, м/с; Ω – угловая скорость ПА, рад/с; W – характерный объем ПА (водоизмещение) ПА, кг; ρ – плотность среды, в ко-

торой движется ПА, кг/м³; δ – углы перекадки рулей ПА, рад.; c_i, m_z – безразмерные характеристики гидродинамических сил и моментов.

Определение значений сил и моментов, действующих на ПА и отдельные его части (рули, движительно-рулевой комплекс, стабилизаторы), является предметом изучения научной дисциплины управляемости судна. Вопросы управляемости очень сложны, теоретические работы используют сложный математический аппарат и не могут быть применены в инженерной практике. В настоящий момент широко применяется модельный эксперимент, где в специальных бассейнах, называемых циркуляционными, определяются ГДХ, а на их основе строятся соответствующие аппроксимационные формулы для соответствующих коэффициентов.

Таким образом, гидромеханика во всем многообразии своих разделов – как теоретическая, так и экспериментальная, рассматривает движение ПА в среде, получая в итоге ГДХ. На следующем этапе эстафету перенимает наука теории корабля, занимающаяся приложением методов гидромеханики к кораблю, или, в нашем конкретном случае – ПА. С определённых ранее ГДХ начинается проектирование ПА. Прежде всего это определение формы заказа, необходимое для компоновки оборудования. Далее, это состав стабилизаторов, кормовых выступающих частей, рулей, движительно-рулевой комплекс, выбираемый из требований обеспечения необходимой скорости плавания как в горизонтальной, так и в вертикальной плоскости, а также требования к управляемости и манёвренности. Данные по потребной мощности движительно-рулевого комплекса, как следствие, станут исходными данными для определения мощности двигателя, ёмкости аккумуляторной батареи. Сами ГДХ войдут органической частью в математическую модель, далее – в алгоритмы автоматических систем, управляющих аппаратом и его движением.

В данном пособии рассматривается определение ГДХ ПА.

2.4. Теория гребного винта

В качестве иллюстрации рассмотрим применение теории крыла к теории движителей.

Работая в качестве движителя, гребной винт создаёт вызванные движением осевые скорости. Вращаясь вокруг своей оси, он вовлекает в это движение окружающую жидкость, закручивает поток, то есть создаёт ещё и вызванные движением окружные скорости. На это затрачивается дополнительная мощность, что является одной из причин, почему КПД винта меньше, чем у идеального движителя. Если рассечь гребной винт двумя соосными цилиндрами, радиусы которых r и $r + dr$, то заключённый между ними участок лопасти можно рассматривать как элемент несущего крыла. Результирующая скорость v_R обтекания этого элемента – геометрическая сумма четырёх скоростей: осевой v_A , окружной и двух вызванных движением (рис. 21).

Винт закручивает поток в сторону своего вращения, поэтому относительная окружная скорость элемента лопасти уменьшается на величину окружной скорости, а для результирующей скорости

$$v_R = \sqrt{(v_A + w_{x0})^2 + (\Omega r - w_{x\theta})^2}, \quad \Omega = 2\pi n.$$

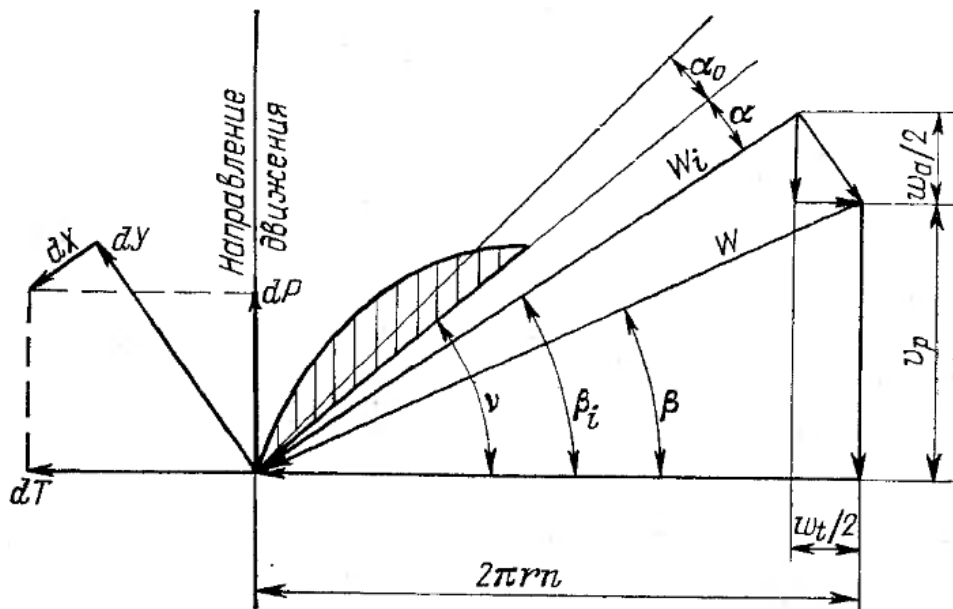


Рис. 21. Схема сил, действующих на сечение профиля гребного винта

Элемент лопасти обтекается потоком со скоростью под углом атаки $\alpha = \nu - \beta_i$, где β_i – угол индуктивной поступи, рад. Элемент лопасти – элемент несущего крыла, на нем возникают подъемная сила dY и сопротивление dX :

$$dY = c_Y \frac{\rho v_R^2}{2} b dr, \quad dX = c_X \frac{\rho v_R^2}{2} b dr.$$

Гребной винт как движитель создаёт силу T , для чего к нему необходимо подвести мощность $P_D = Q \cdot \Omega$, где Q – момент сопротивления вращению винта с угловой скоростью Ω , Н·м.

В свою очередь, упор и момент винта можно найти путём сложения сил, действующих на отдельные элементы лопастей. Проецируя подъемную силу и силу профильного сопротивления на направление движения и нормальное к нему направление, находим элементарные силы упора и сопротивление вращению:

$$dT = dY \cos \beta_i - dX \sin \beta_i = dY \cos \beta_i (1 - \varepsilon \operatorname{tg} \beta_i),$$

$$d\tau = dY \cos \beta_i + dX \sin \beta_i = dY \sin \beta_i (1 + \varepsilon \operatorname{tg} \beta_i).$$

Суммируя силы и моменты, возникающие на всех элементах лопасти, и, учитывая число лопастей, найдём упор T , создаваемый винтом, и момент Q , необходимый для его вращения:

$$T = Z_p \int_{r_n}^R c_Y \frac{\rho v_R^2}{2} \cos \beta_i (1 - \varepsilon \operatorname{tg} \beta_i) b dr,$$

$$Q = Z_p \int_{r_n}^R c_Y \frac{\rho v_R^2}{2} \sin \beta_i (1 + \varepsilon \operatorname{ctg} \beta_i) b r dr ,$$

где R – радиусы винта, м; r_n – радиусы ступицы, м.

2.5. Задачи, возникающие при определении ГДХ и параметров движения

Уравнения пространственного движения ПА – очень сложны. Поэтому при решении задач динамики ПА используются те или иные допущения, позволяющие упростить задачу, прежде всего свести ее к плоской постановке. В этом случае рассматривается отдельно задача о движении ПА в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Даже такое разделение пространственной задачи на две плоские значительно упрощает ее. При этом в уравнении (10) вместо шести уравнений остаётся три: по два на силы и одно – на момент.

Так, при движении в вертикальной плоскости уравнение (10) для движения подводного объекта в вертикальной плоскости принимает вид:

$$\begin{cases} F_x^r = \frac{\rho W^{2/3}}{2} c_x(\alpha, \beta, \Omega, \delta) V^2 \\ F_y^r = \frac{\rho W^{2/3}}{2} c_y(\alpha, \beta, \Omega, \delta) V^2 \\ M_z^r = \frac{\rho W}{2} m_z(\alpha, \beta, \Omega, \delta) V^2 \end{cases}$$

и характеризуется тремя величинами: α – углом атаки; β – углом дрейфа; Ω – угловой скорости вращения.

Как и во всех других областях гидромеханики, плоская задача гидромеханики решается теоретическим и экспериментальным методами. Для решения плоской задачи разработан математический аппарат ТФКП, позволяющий в принципе аналитически решить любую плоскую задачу. При стремлении к точности данная задача может сколь угодно усложняться, однако с применением компьютера решение может быть построено в виде бесконечного ряда. Существуют методики расчёта потенциального обтекания симметричных удобообтекаемых тел, а с помощью зеркальных отображений можно моделировать границы потока, дно и поверхность. В теоретической гидродинамике продолжает развиваться тема аналитического описания и плохо обтекаемых тел – в рамках так называемой струйной теории, также основанной на ТФКП. К сожалению, эти результаты не нашли приложения в инженерной практике.

Среди экспериментальных методов можно назвать метод электрогидродинамической аналогии. В его основе лежит аналогия между основными уравнениями гидромеханики потенциальных течений и электростатики, что на самом деле обуславливается возможностью описания плоской задачи методами ТФКП, введения понятия потенциала и линии тока, невозможных при решении пространственной задачи. Эксперимент происходит в электролитической ванне, где на моделируемом теле создаётся определённый потенциал. Вводя щуп в ту или иную точку ванны, можно определить потенциал и поле напряжённости; оно бу-

дет аналогично вектору скорости. Данный метод малоприменим ввиду того, что рассматривает задачу установившегося движения ПА. Рассматриваются и прямые эксперименты с жидкостями. Например, в [8] рассматривается лоток Хил-Шоу. Течение подкрашено, что позволяет увидеть линии тока в воде между двумя стеклянными пластинками, отстоящими на расстояние около одного миллиметра. Малость величины третьего размерения гарантирует переход от пространственного обтекания задачи к плоской его постановке. Данные эксперименты обладают большой физичностью и наглядностью, о чем свидетельствует богатый набор фотографий альбома. К сожалению, проведение данных экспериментов требует высокого уровня профессионализма экспериментатора и по сей день такие эксперименты единичны.

При сложности теоретических и экспериментальных методов в настоящее время активно развивается численная гидромеханика.

В процессе проектирования ПА необходимо решить вопросы, относящиеся к его гидромеханике:

- управляемость – определение ГДХ (коэффициент сопротивления, поперечная сила, моменты) при различных режимах плавания ПА (всплытие/погружение, аварийное всплытие, маневрирование и управляемость) как на корпусе, так и на отдельных элементах ПА (на горизонтальных и вертикальных рулях, стабилизаторах);

- ходкость – нахождение силы сопротивления, возникающей на корпусе и отдельных обтекателях;

- гидродинамическое проектирование движителей – создание движителя, имеющего максимальный КПД и наилучшие характеристики взаимодействия с корпусом ПА;

- гидроакустика – изучение вибрации колеблющихся поверхностей при срыве вихревых дорожек необходимо для расчета акустического спектра.

Отличительные особенности решения прикладных задач гидромеханики ПА:

1. Малая скорость движения ПА. В отличие от аэромеханики жидкость рассматривается несжимаемой. Кавитация на отдельных элемента корпуса, типичная для быстро движущихся аппаратов, для ПА исключена, однако необходима при расчете гребных винтов. Вместе с тем, скорость движения аппарата всегда происходит при скоростях, больше $Re_{кр}$. Следовательно, поток является турбулентным.

2. Обтекание трёхмерно.

3. Существенное взаимодействие отдельных частей ПА между собой. Так, в гидродинамическом расчёте гребного винта движитель изменяет поле потока на обтекание корпуса, но и обтекание корпуса изменяет поле скоростей в диске винта. В случае расчёта волнового сопротивления может возникнуть интерференция возникающих волн.

4. Для задач управляемости, рассматривающих динамику ПА, обтекание корпуса нелинейное и нестационарное.

Таким образом, изучение гидромеханики ПА в вопросах управляемости, гидромеханического проектирования движителя, проектирования кормовых выступающих частей в их взаимодействии с движителями, может стать задачей, представляющей значительные трудности.

В качестве примера прикладной задачи гидромеханики нами будет рассмотрено обтекание крылового профиля. Не следует думать, что крыло является неотъемлемой частью только самолётостроения. С точки зрения аэромеханики, крылом называется тело определённого профиля, на котором при его движении возникает подъёмная сила. То есть, там, где необходимо создать упор или импульс движения, необходимо использовать (за редкими исключениями) крыло. Так, если рассечь гребной винт, мы увидим в сечении крыловой профиль. При обтекании гребного винта на лопасти возникает подъёмная сила, которая, суммируясь по лопастям, в итоге передаст упор судну. В теории управляемости корпус судна может рассматриваться как крыловой профиль, на котором при угле дрейфа возникает поперечная сила.

3. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ АЭРОГИДРОМЕХАНИКИ

3.1. Методы дискретизации и решения уравнений Навье–Стокса

Уравнения Навье–Стокса могут быть решены в общем виде лишь в некоторых случаях и при ряде допущений. Общего аналитического решения этих уравнений пока не получено. При этом численные методы их решения развиты довольно хорошо и широко применяются в различных областях науки и техники. В настоящий момент можно говорить о существовании отдельной научной дисциплины – вычислительной гидромеханики, представляющей различные методы дискретизации и решения уравнений Навье–Стокса.

Методы дискретизации можно разделить по следующим признакам:

– по типу исходных математических соотношений – дифференциальные уравнения, описывающие поведение моделируемой среды; вариационные принципы, записанные в интегральной форме и эквивалентные дифференциальным уравнениям.

– по методу дискретизации исходных соотношений – метод конечных разностей; метод взвешенных невязок.

Комбинация перечисленных методов дискретизации даёт четыре категории представленные в табл. 1. Кроме них используются и комбинации дискретных и аналитических методов: метод полос, метод редуцированных коэффициентов и т.п.

Т а б л и ц а 1

Классификация численных методов

Дискретизация	Исходные соотношения	Метод дискретизации
Разностные отношения	Дифференциальные уравнения	Классический метод конечных разностей
	Вариационные принципы	Вариационно-разностные методы
Базисные функции	Дифференциальные уравнения	Метод Бубнова–Галеркина, метод наименьших квадратов, моментов, метод коллокаций по точкам и подобластям
	Вариационные принципы	Метод Ритца, метод конечных элементов

Рассмотрим вкратце три основных метода вычислительной гидромеханики.

Метод конечных разностей. Суть метода заключается в прямой замене производных, входящих в исходные уравнения, их дискретными (разностными) аналогами. Решение ищется в узлах сетки, на которую разбивается расчётная область. Достоинством метода является относительная простота реализации, при этом, однако, с точки зрения физического смысла метод не очень нагляден. Другим недостатком являются особые требования к построению сетки, что часто усложняет процесс решения.

Метод конечного объёма. Основа метода заключается в том, что расчётная область с помощью сетки разбивается на совокупность конечных объёмов. Узлы, в которых ищется решение, находятся в центрах этих объёмов. Для каждого объёма должны выполняться законы сохранения массы, количества движения и энергии. Например, изменение во времени массы среды в контрольном объёме может происходить только за счёт внешнего потока массы, входящего в объём, или за счёт потока массы из данного объёма выходящего.

Метод конечных элементов (МКЭ). Суть метода состоит в приближенном решении вариационной задачи. В настоящее время МКЭ широко применяется при решении задач теплопроводности в твёрдых телах и при расчётах на прочность. Однако он может быть применён и к задачам гидродинамики. Известны также методы, которые сочетают в себе метод конечных объёмов и МКЭ. Это сочетание позволяет использовать более широкий ряд расчётных сеток (тетраэдрические сетки, пирамиды, призмы, полиэдры), что необходимо при решении задач со сложной геометрией.

Физическая суть вычислительных методов заключается в замене непрерывных решений задач гидромеханики их дискретными аналогами на расчётной сетке. Мы не будем рассматривать все методы дискретизации уравнений (содержание их составляет предмет отдельной науки – вычислительной математики). Опишем только один – метод конечного объёма, как наиболее физичный из методов дискретизации, обладающий при этом огромным преимуществом соблюдения баланса величин.

3.2. Метод конечного объёма

Метод конечного объёма – метод численного моделирования физических процессов – активно применяется для решения задач аэрогидродинамики. В основе метода лежит разбиение пространства решаемой задачи на ограниченное число соприкасающихся блоков разного размера и определенной формы (создание топологии). Своеобразным аналогом можно считать аналитическое решение физической задачи, при котором область задачи разбивается на бесконечно малые объёмы, которые в дальнейшем интегрируются согласно известному физическому уравнению. Однако в случае численного решения, пространство разбивается на блоки конечного размера и решение находится внутри каждого из них, поэтому оно носит дискретный характер. Соответственно, размер блока напрямую влияет на точность решения: чем меньше блок, тем больше точек решения функции и точнее решение.

Для каждого блока записывается балансовое уравнение, которое представляет собой интегральный закон сохранения физической величины.

Уравнение баланса величины $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ в конечном объёме Ω , ограниченном поверхностью $S = \sum S_k$ с внешней нормалью \vec{n} :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} d\Omega + \sum_k \int_{S_k} (\vec{n} \cdot \vec{q}) dS = \int_{\Omega} Q d\Omega,$$

где \vec{q} – вектор плотности потока величины φ ; Q – плотность распределения объёмных источников; \vec{U} – вектор скорости; ρ – плотность среды.

В данном уравнении первое слагаемое представляет собой скорость изменения величины φ в конечном объёме Ω с течением времени, второе слагаемое описывает поток величины φ через границу S . При внешней ориентации вектора нормали положительное значение слагаемого говорит о том, что величина φ вытекает из объёма, последний интеграл представляет собой сумму источников величины φ в объёме Ω (либо поглотителей).

В качестве φ может фигурировать, например, внутренняя энергия текущей среды, кинетическая энергия турбулентности и т.д. При переходе к бесконечно малому объёму можно на основании формулы Остроградского–Гаусса переписать это уравнение в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \nabla \vec{q} = Q,$$

где ∇ – оператор Лапласа. Это общий вид уравнения баланса величины.

Следующий шаг в решении задач численными методами состоит в переходе от дифференциальных уравнений на всём пространстве задачи к алгебраическим в определённых точках этого пространства, которые решаются достаточно просто относительно дифференциальных. Это называется дискретизацией. В большинстве случаев аппроксимирующее алгебраическое уравнение представляет собой функцию вида

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m,$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ – неизвестные коэффициенты функции. В таком случае, система дифференциальных уравнений превращается в систему алгебраических:

$$\begin{cases} \alpha_{10} + \alpha_{11}x + \dots + \alpha_{1n}x^n = 0, \\ \dots \\ \alpha_{m0} + \alpha_{11}x + \dots + \alpha_{1m}x^n = 0. \end{cases}$$

Данная система решается известными методами, например методом Гаусса.

Неизвестным будет выступать всё та же величина φ , принимающая разные значения в каждой заданной точке. Для того чтобы найти эту величину, нужно сделать предположение о характере ее изменения в каждом блоке. Также каждый блок содержит одну и только одну узловую точку, в которой ищется вычисляемая

величина. Дифференциальное уравнение исследуемого процесса интегрируется по каждому конечному объёму, при этом интегральное значение величины сохраняется. Численные решения ищутся только для самих узловых точек. Полученная дискретная задача выражает закон сохранения исследуемой величины, перенося свойство консервативности бесконечно малого объёма, для которого составлено дифференциальное уравнение, на конечные объёмы расчётной области.

Следующий процесс – создание расчётной сетки, которая необходима для вычисления интегралов искомых величин. Зачастую расчётная сетка и конечные объёмы совпадают (определяется реализацией построения сетки в конкретной программе), поэтому узел сетки располагается в вершине блока, а линия сетки совпадает с его ребром. Узловая точка блока в таком случае в основном располагается в центре сеточной ячейки. При вычислении интеграла важно, чтобы для соприкасающихся объёмов поверхностный интеграл по их общей грани совпадал. Данное требование необходимо для соблюдения баланса искомой величины.

Преимущества метода контрольного объёма:

1. Конечные области сложной геометрии можно разбивать на конечные объёмы.

2. Размеры конечных объёмов могут быть переменными (это позволяет укрупнить или измельчить сеть разбиения области на элементы, если в этом есть необходимость).

3. Даже при грубой математической сетке выполняется условие точного интегрального баланса исследуемой величины, что позволяет обходиться меньшими по мощности вычислительными устройствами.

К недостаткам метода контрольных объёмов можно отнести его малую универсальность. Метод используется для решения только определённых классов задач.

3.2.1. Модели турбулентности

Алгебраические модели основываются на идее пути смешения, выдвинутой Л. Прандтлем в 1925 г. Рассматривая осреднённые сдвиговые течения без градиента давления, Прандтль постулировал, что характерный масштаб пульсаций скорости равен градиенту осреднённой скорости, умноженному на характерный масштаб длины ℓ_m , который он назвал путем смешения. Понятие пути смешения в теории турбулентности сродни понятию свободного пробега молекулы в кинетической теории газов. Путь смешения есть некоторая длина, на которой вихрь теряет свою индивидуальность, смешиваясь с окружающим потоком. Это расстояние также равно среднему расстоянию пульсаций. В свете гипотезы пути смешения можно получить следующее выражение для турбулентной вязкости:

$$\nu_T = \ell_m^2 \cdot \left| \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial y} \right|,$$

где ℓ_m – так называемая длина смешения, м; ν_T – турбулентная вязкость, м²/с.

С помощью модели Прандтля было получено много важнейших результатов. Сейчас она мало применяется, поскольку пригодна лишь для простых типов течений. Модель пути смешения Прандтля является алгебраической моделью. Алгебраические модели отличаются тем, что для получения значений турбулентной вязкости не требуется решать дополнительных дифференциальных уравнений.

Модели с дифференциальными уравнениями более сложны, но и более универсальны, их можно применять к широкому кругу задач.

Самой известной и популярной на сегодняшний день дифференциальной моделью является модель « $k-\varepsilon$ ». Для её построения вводятся два параметра:

- кинетическая энергия турбулентности:

$$k = \frac{\bar{U}'_i \bar{U}'_i}{2};$$

- диссипация турбулентной энергии:

$$\varepsilon = \nu \frac{\partial \bar{U}'_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{U}'_i}{\partial x_k}.$$

Фактически уравнения модели турбулентности представляют собою закон сохранения турбулентной энергии. Из анализа размерностей следует, что турбулентная кинематическая вязкость

$$\nu_T = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon},$$

где c_μ – некоторая константа.

Кроме « $k-\varepsilon$ » существует целый ряд других дифференциальных моделей, например « $k-\omega$ », впервые предложенная Колмогоровым в 1942 г. Эта модель содержит уравнения переноса кинетической энергии турбулентности k и удельной скорости диссипации энергии ω . Её связывают с k и ε соотношением $\omega = \varepsilon/c_D k$, где c_D – некоторая константа.

Далеко не все дифференциальные модели состоят из двух уравнений. К примеру, распространённая в расчётах дозвуковой аэродинамики модель Спалларта и Алмареса содержит только одно уравнение, а модель Пола Дурбина – четыре. У каждой из моделей есть свои преимущества и недостатки, свои требования к сетке и особенности решения.

3.2.2. Моделирование течений вблизи сетки

Далеко не все модели турбулентности адекватно отражают процессы, происходящие в пристеночной области. Причиной этого является тот факт, что вблизи стенки силы вязкости часто преобладают над силами инерции, течение там не полностью турбулентно. По способности адекватно смоделировать пристеночный слой все модели делят на высокорейнольдсовские и низкорейнольдсовские. Низкорейнольдсовские модели без привлечения каких-либо дополнительных приёмов позволяют адекватно моделировать пристеночный слой. Для моделиро-

вания пристеночных слоёв при помощи высокорейнольдсовских моделей часто используют метод пристеночных функций.

Известно, что пристеночная область течения может быть разбита на три зоны (рис. 22).

1) вязкий подслой, в котором вязкие напряжения доминируют над рейнольдсовскими и имеет место линейная зависимость скорости потока от расстояния до стенки: $u^+ = y^+$, где u^+ – безразмерная скорость; y^+ – безразмерное расстояние от стенки. При этом $u^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau}$, $y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}$, $u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$, где u_τ – динамическая скорость;

2) буферный слой, где вязкие и рейнольдсовские напряжения имеют один порядок. Сшивая профили скорости для вязкого подслоя и логарифмического слоя, приближённо получают: $u^+ = 5 \ln y^+ + 3,05$;

3) логарифмический слой, где рейнольдсовские напряжения намного превышают вязкие, а профиль скорости может быть представлен в форме логарифмического закона: $u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln E y^+$, где κ – постоянная Кармана; E – постоянная, определяющая степень шероховатости.

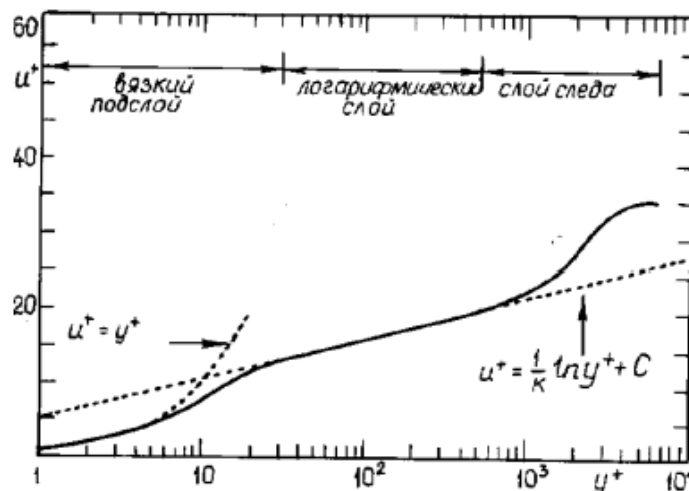


Рис. 22. Структура пристеночного слоя

Существуют следующие рекомендации касательно y^+ для корректного моделирования пограничного слоя. Для верного разрешения пристеночного слоя при использовании низкорейнольдсовой модели необходимо строить сетку, имеющую в пристеночной области ($y^+ \leq 40$) не менее 20 узлов, при этом для первой ячейки должно выполняться условие $y^+ \approx 1$. Для адекватной работы высокорейнольдсовых моделей турбулентности центр пристеночной ячейки должен располагаться в области логарифмического профиля скорости, т.е. при $30 \leq y^+ \leq 100$.

Описанные участки обычно объединяются в одну внутреннюю область, около 20 % толщины пограничного слоя, в которой генерируется около 80 % всей энергии турбулентности. Одно из важных свойств внутренней области заключа-

ется в том, что профиль скорости слабо зависит от числа Рейнольдса, продольного градиента давления и прочих внешних условий. Именно это свойство послужило основой для построения универсальных соотношений (пристеночных функций), связывающих параметры течения с расстоянием от стенки.

3.2.3. Модели DNS, LES, DES

Все подходы к моделированию турбулентности, описанные выше, основаны на одном и том же принципе – осреднении Рейнольдса, когда в уравнение движения в том или ином виде добавляется дополнительная вязкость. Таким образом, задача о турбулентном течении заменяется задачей о ламинарном («квазиламинарном») течении. Главным недостатком такого подхода является то, что модели, основанные на осреднении Рейнольдса, не в состоянии воспроизвести многие эффекты, возникающие при зарождении, взаимодействии и распаде вихревых структур. Указанных недостатков лишён подход, называемый прямым численным моделированием (DNS). При этом подходе для математического моделирования турбулентных течений никакие специальные модели турбулентности не применяются, а все эффекты, связанные с возникновением и эволюцией турбулентных вихрей, получаются напрямую из решений уравнений Навье–Стокса. Прямое численное моделирование быстро прогрессирует, хотя достижимые расчётные числа Рейнольдса остаются пока слишком низкими. К настоящему времени получены данные DNS для ряда двумерных и трёхмерных течений, в том числе с отрывом потока, и список приложений продолжает расти.

Более простой моделью является моделирование крупных вихрей (LargeEddySimulation, LES). В этом подходе крупные вихри рассчитываются, а мельчайшие вихри подсеточного масштаба моделируются. Основной предпосылкой такого подхода является то, что наибольшие вихри, которые находятся под прямым воздействием граничных условий, несут максимум рейнольдсовских напряжений и должны быть рассчитаны. Мелкомасштабная турбулентность является слабой, содержащей меньше рейнольдсовских напряжений. Также она близка к изотропной и имеет характеристики, близкие к универсальным, поэтому в большей мере поддаётся упрощённому моделированию. Основное различие между вариантами LES состоит в разном подходе к моделированию подсеточных масштабов. Подробнее – в книге [9].

Метод моделирования отошедших вихрей (DetachedEddySimulation, DES) является логическим развитием LES. Суть метода заключается в том, что расчётная область разделяется на слой около стенки и остальную область. Пристеночный слой моделируется с помощью более простых моделей турбулентности (например, одной из моделей с турбулентной вязкостью), а вся остальная область – с помощью LES.

Как мы увидели, наиболее распространённым подходом является замена исходных уравнений, описывающих течение на уравнения для осреднённых характеристик с добавлением дополнительных («турбулентных») членов, описывающих турбулентный перенос. Опыт показывает, что эти дополнительные члены часто существенно превосходят по величине перенос, осуществляемый за счёт молекулярного взаимодействия. Таким образом, турбулентный перенос при превышении критического числа Рейнольдса становится одним из основных механизмов переноса вещества, количества движения и энергии в потоке. Характе-

ристики турбулентного переноса определяются с помощью моделей турбулентности. Универсальных моделей на сегодняшний день не существует. Для разного типа течений разные модели дают результаты, а разной степени отражающие реальную картину течения. Правильный выбор модели турбулентности является ключом к получению адекватных результатов.

4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ АЭРОГИДРОМЕХАНИКИ СРЕДСТВАМИ ПО «ЛОГОС»

В настоящее время разработано и активно используется большое количество ПО численной гидромеханики, среди которых можно назвать «Логос АэроГидро», FlowVision, Flow3d, PHOENICS, ANSYS CFX, ANSYS Fluent, Star-CD, Star-CCM+. Наиболее известным, включенным во многие учебные программы вузов, является ПО ANSYS, разработанное за рубежом. Но в последние годы наблюдается постепенный переход на использование отечественного импортозамещающего ПО, такого как «Логос АэроГидро» и FlowVision. Опишем кратко возможности каждого из пакетов.

Задачи, решаемые в «Логос АэроГидро»:

- определение ГДХ при движении судов, движителей, ледокольной техники; моделирование кавитации;
- моделирование турбулентности: $k-\varepsilon$ стандартная, $k-\varepsilon$ низкорейнольдсовская, $k-\omega$ DES, гибридные модели турбулентности (RANS-LES, RANS-IDDES), LES, ламинарно-турбулентный переход, пристеночные функции;
- применение численного метода конечного объема, явной и неявной схем решения;
- стационарные и нестационарные задачи, использование схем высокого порядка по пространству и времени;
- моделирование свободной поверхности (VOF-метод);
- моделирование движения твёрдых тел (MRF, с перекрытиями «Химера», DoF);
- рассмотрение многокомпонентных течений;
- решение задач на несостыкованных сетках, как стационарных, так и «скользящих» относительно друг друга (Sliding Interface).

Из вышеперечисленных возможностей каждого из пакетов видно, что они обладают примерно одинаковым функционалом при решении задач гидромеханики. Однако в состав ПО «Логос» входят составными частями и другие пакеты, например, Логос-Прочность, что позволяет выполнять связанные расчеты без привлечения дополнительного ПО.

4.1. Основные задачи численного моделирование

4.1.1. Постановка задачи

На данном этапе работы создаётся математическая модель физической картины задачи. Составляется список уравнений, которые необходимо решить, упрощений, которые необходимо использовать. Создаётся САД-модель.

1. Определяется тип решаемой задачи: стационарная или нестационарная. Стационарная задача рассматривает один момент времени ($t = 0$), только с многочисленными итерациями к нему. Как только невязки станут меньше заранее заданных значений величин, процесс считается сошедшимся. Нестационарная задача соответствует неустановившемуся (нестационарному) течению, параметры которого в переменных Эйлера явно зависят от времени.

2. Выбирается тип течения: ламинарный или турбулентный. При ламинарном течении поток движется строго в определённом направлении и не происходит перемешивание соседних слоёв потока. При турбулентном во время движения потока происходит перемешивание соседних слоёв потока, при этом частицы переходят из слоя в слой.

3. Для получения решения любого уравнения в частных производных требуется задать условия на границе рассматриваемой области.

Выделяют несколько типов граничных условий:

- граничное условие на входе (inlet);
- граничные условия на стенке (wall slip, wall no slip);
- граничные условия симметрии (symmetry);
- периодические граничные условия (periodicboundaryconditions);
- граничные условия на выходе (outlet);
- давление.

4. Задаются физические параметры среды, обтекающей тело, в частности, динамический коэффициент вязкости μ и плотность ρ . Следует обратить внимание, что при верификации и валидации численного расчета необходимо сравнивать не скорости потока, а числа Рейнольдса Re . При проведении численных расчетов, задаваясь числом Рейнольдса Re , находят скорость потока на входе в расчётную область.

4.1.2. Выбор численной схемы

Здесь задаются общие параметры задачи: тип решателя и время. Тип решателя определяет, как решаются уравнения (1), (3) (к которым также могут быть добавлены уравнение состояния вещества, уравнение энергии и т.д.). Каждое из этих уравнений можно решать, как совместно с другими, так и по отдельности. Раздельное решение требует меньше памяти, хотя при этом может возникнуть ряд проблем. При раздельном решении требуется применять особые приёмы для того, чтобы решения, получаемые для поля давления и для поля скорости, соответствовали друг другу. Для этой стыковки часто вводят для каждого уравнения системы свою собственную особую сетку и специальные формулы для корректировки давления и скорости. Популярный метод, сокращённо называемый SIMPLE, описан в книге Патанкара [17]. В плоских задачах внешней гидромеханики рекомендуется использовать простейшую постановку раздельного решателя – метод SIMPLE.

4.1.3. Построение сетки и выбор шагов по времени

Построение сетки начинается с построения поверхностной сетки и затем, на её основе, объёмной сетки расчётной области. Основным параметром является базовый размер, определяемый минимальным характерным геометрическим размером обтекаемой модели.

Базовый размер ячейки – величина, относительно которой проводится измерение остальных параметров построения сетки. Представляет собой максимальное расстояние между двумя произвольными точками ячейки, задаётся в метрах. Базовый размер напрямую влияет на величину ячейки. Уменьшение базового размера приводит к уменьшению ячейки и увеличению точности расчёта. В случае одномерной или двумерной задачи базовый размер может быть сопоставим с размером тела в направлении, в котором не происходит изменения физической величины. По определению, базовый размер не может быть больше линейного размера ячейки.

Глобальные параметры сетки – параметры, заданные для всей расчётной области. Распространяются на каждую ячейку сетки, если в ней не заданы локальные параметры.

Локальные параметры сетки – параметры, заданные для конкретного объёма, содержащего пространственную сетку, или границы, содержащей поверхностную сетку. Не распространяются на остальные расчётные области.

Время в физике может рассматриваться как своеобразная «четвертая координата». Исходя из приведённой аналогии, при численном решении задач время процесса можно разбить на некоторое количество шагов, создав наряду с пространственной сеткой временную.

Существует два основных метода решения нестационарных задач.

Метод, в котором неизвестные величины на текущем временном шаге выражаются через величины предыдущего временного шага, которые уже известны, называется явным.

В неявном же методе величины на текущем временном шаге выражаются друг через друга. Явный метод более прост, однако на него накладываются дополнительные ограничения по временному шагу, в то время как никаких ограничений (кроме физических) на временной шаг в неявном методе не накладывается.

Для многих процессов характерен нестационарный режим обтекания. Тип шага по времени может быть фиксированным, задаваемым пользователем, и определяемым автоматически исходя из числа Куранта. Число Куранта есть отношение временного шага Δt к характерному времени скорости потока U_x . Это число отражает, насколько велик шаг времени по отношению к характерному времени протекания процессов в системе. Если мы выберем слишком большой временной шаг, то можем пропустить какие-то процессы в системе, что приведёт к нефизичности явлений. В идеале число Куранта ~ 1 , однако можно показать, что число Куранта $\sim Re$. Так, при числах Рейнольдса $\sim 10^7$ число Куранта

также оказывается равным $\approx 10^7$. При увеличении скорости потока требуемые вычислительные мощности, как видим, увеличиваются в экспоненциальной степени.

При выборе шага по времени, задаваемом пользователем, необходимо исходить из требования, чтобы шаг дискретизации по времени был приблизительно равен времени, проходимому течением длины одной ячейки. При выборе конечного значения времени необходимо задаться условием, чтобы начальное возмущение от входа потока как минимум три раза прошло по длине всей расчётной области (теорема Найквиста–Котельникова).

4.1.4. Верификация полученного решения

Необходимо заблаговременно продумать состав граней исследуемой модели, на которых будут исследоваться интегральные ГДХ, а также состав характеристик, которые необходимо фиксировать в процессе расчёта.

В процессе расчёта будут получены выбранные ранее характеристики, по которым необходимо будет провести верификацию.

4.2. Обтекание цилиндра невязкой жидкостью

Рассматривается двумерное обтекание цилиндра потоком невязкой жидкости или невязкого газа в условиях малых дозвуковых скоростей (рис. 23). Цилиндр с радиусом a установлен поперек потока. При предположении о потенциальном характере обтекания двумерное решение имеет вид:

– поле скоростей

$$\vec{V} = u - iv = |V_\infty| \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right), \quad (11)$$

где $z = x + iy = re^{i\varepsilon}$;

– модуль скорости на контуре цилиндра:

$$|V| = 2|V_\infty| |\sin \varepsilon|; \quad (12)$$

– распределение коэффициента давления по поверхности цилиндра:

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho V_\infty^2}{2}} = 1 - 4 \sin^2 \varepsilon. \quad (13)$$

При сопоставлении результатов численного моделирования с представленным решением надо учитывать, что рассматриваемое аналитическое решение по отношению к реальным вязким течениям адекватно только на наветренной стороне цилиндра. Соответственно, если в численном моделировании используется модель невязкой жидкости, то результаты должны совпадать во всей области течения. Если используется модель вязкой жидкости (числа Рейнольдса $Re = 10^3$ и выше), то результаты должны совпадать только на наветренной стороне.

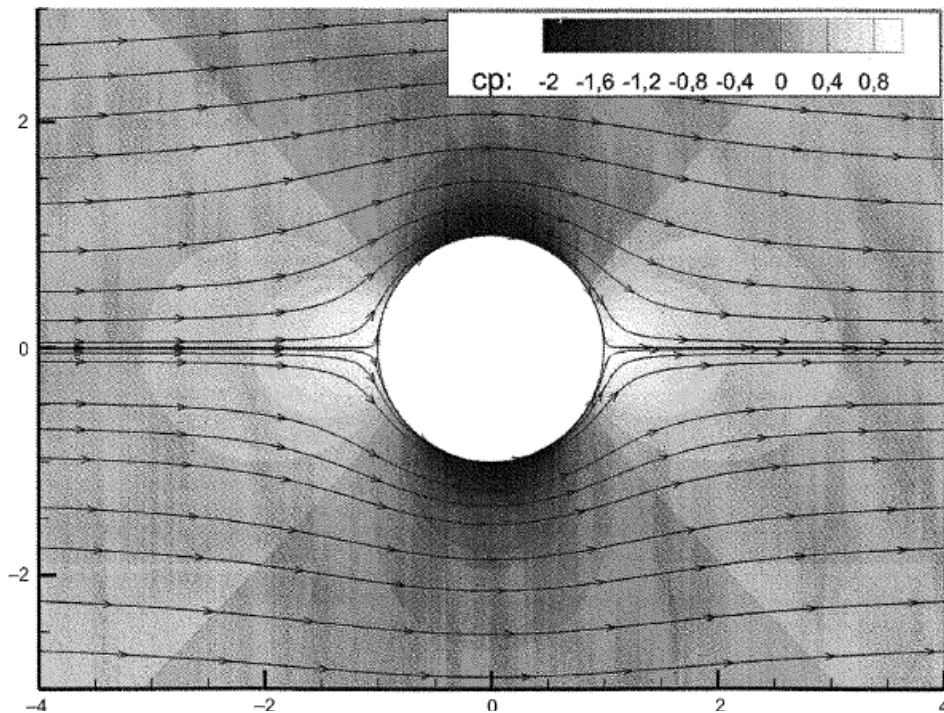


Рис. 23. Двумерное обтекание цилиндра потоком невязкой жидкости или невязкого газа в условиях малых дозвуковых скоростей

В процессе верификации рассматриваются две расчётные сетки, представленные на рис. 24 и 25. Первая прямоугольная и характеризуется базовым размером 0,03, вторая блочно-структурированная, ячейки радиальны. В настройках программы, в разделе «Вещества» задаётся вязкость $\mu = 0$.

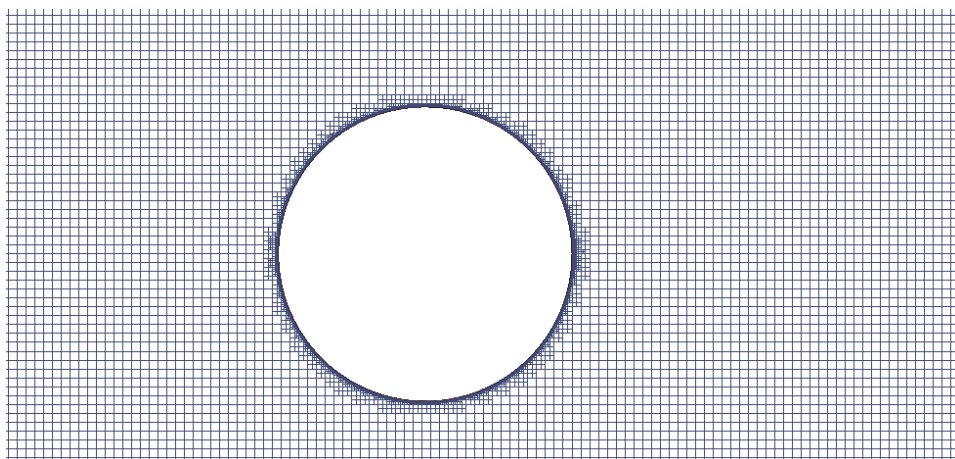


Рис. 24. Задача верификации обтекания кругового цилиндра. Расчётная сетка № 1

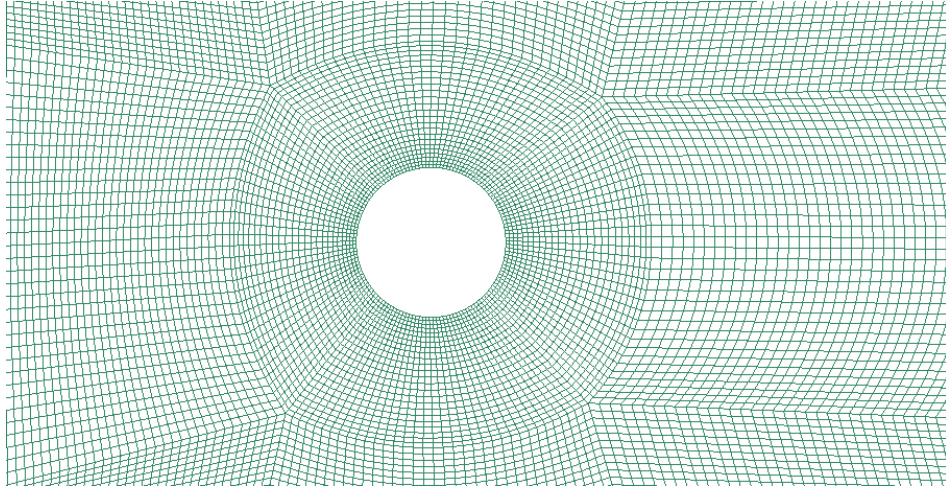


Рис. 25. Задача верификации обтекания кругового цилиндра. Расчётная сетка № 2

Результаты расчёта на сетке № 1 представлены на рис. 26. Точками показаны результаты численного эксперимента в ПО «Логос», сплошными кривыми – теоретические зависимости (11), (12) и (13). По оси абсцисс отложен угол θ , отсчитываемый против часовой стрелки от положительного направления оси OX . Очевидна хорошая сходимость результатов в задней половине цилиндра. Разброс экспериментальных точек хаотичный.

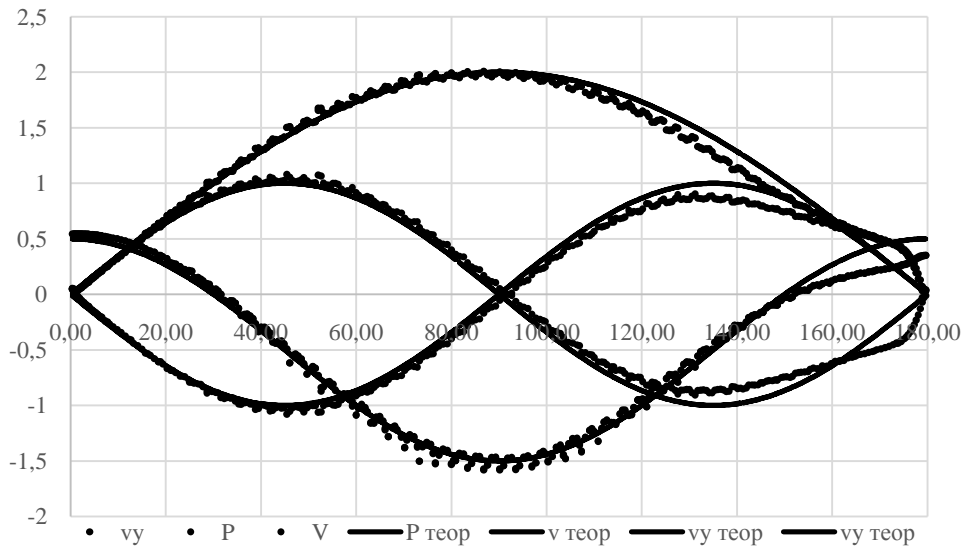


Рис. 26. Результаты расчёта обтекания цилиндра на сетке № 1

Рис. 27 показывает хорошую сходимость результатов в передней части цилиндра. Разброс экспериментальных точек гладкий.

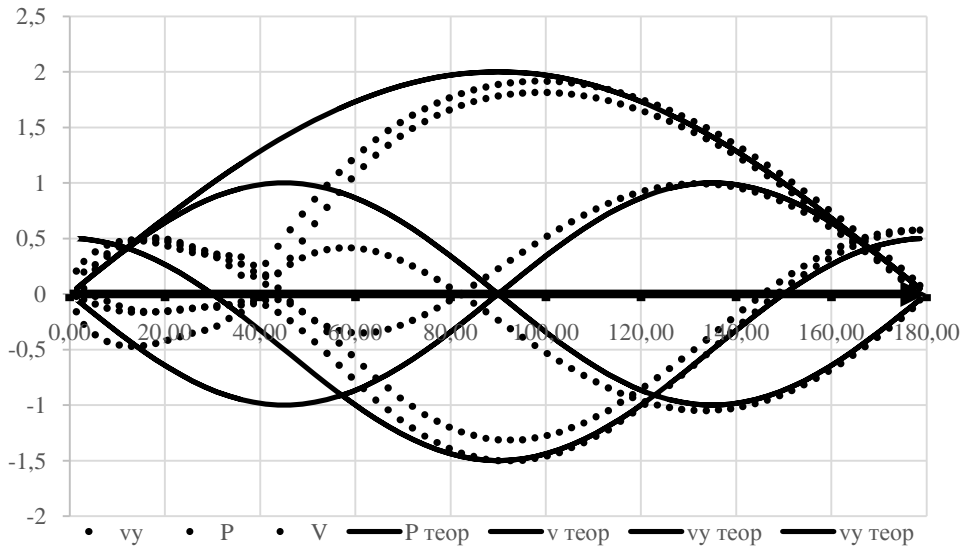


Рис. 27. Результаты расчёта обтекания цилиндра на сетке № 2

Таким образом, мы видим, что расчёт по сетке № 1 хорошо описывает течение в передней части цилиндра, тогда как расчёт по сетке № 2 – в задней.

4.3. Обтекание пластины невязкой жидкостью

Рассматривается двумерное обтекание пластины потоком невязкой жидкости для невязкого газа в условиях малых дозвуковых скоростей. Пластина с размером хорды $2a$ установлена под углом атаки α . При предположении о потенциальном характере обтекания и выполнении условия Кутта–Жуковского на задней кромке крыла двумерное решение имеет вид:

– поле скоростей:

$$\vec{V} = u - iv = u_\infty - iv_\infty \sqrt{\frac{z-a}{a+z}},$$

где $z = x + iy = re^{i\varepsilon}$;

– коэффициент подъёмной силы пластины:

$$c_y = \frac{Y}{2a \frac{\rho v_\infty^2}{2}} = 2\pi \sin \alpha; \quad (14)$$

– точка приложения центра давления (точка приложения подъёмной силы) расположена в точке $x = -a/2$ или на расстоянии $1/4$ длины хорды крыла от передней кромки.

При сопоставлении результатов численного моделирования с представленным решением надо учитывать, что рассматриваемое аналитическое решение справедливо при малых углах атаки в условиях безотрывного обтекания подветренной стороны. При использовании модели вязкой жидкости условие Кутта–Жуковского должно выполняться автоматически.

Рассматривается обтекание пластины размерами $10000 \times 5000 \times 5$ мм (рис. 28). Расчётная область размерами 10000×5000 мм, отстояние передней кромки пластины от переднего края расчётной области 2000 мм.

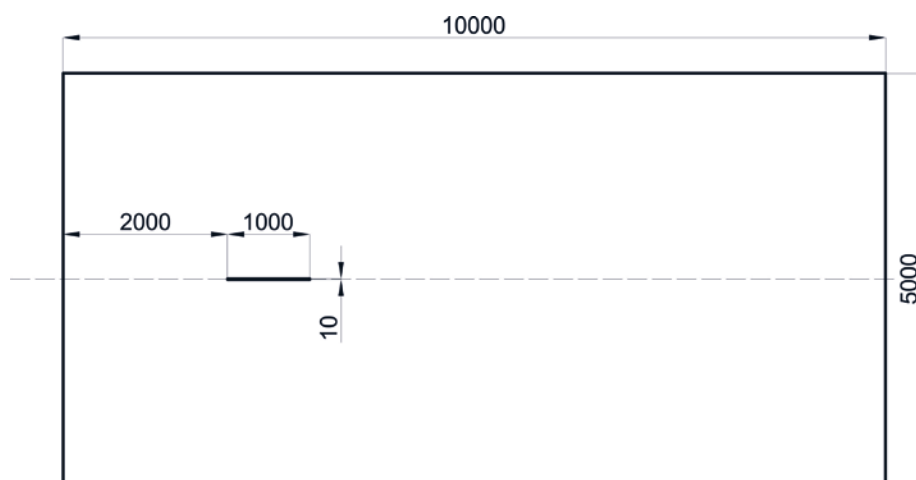


Рис. 28. Геометрические размеры расчётной области

Рассматривается ортогональная декартова сетка с базовым размером ячеек 10 мм. На рис. 29 приведён пример сетки для пластины, обтекаемой под углом атаки 10° .

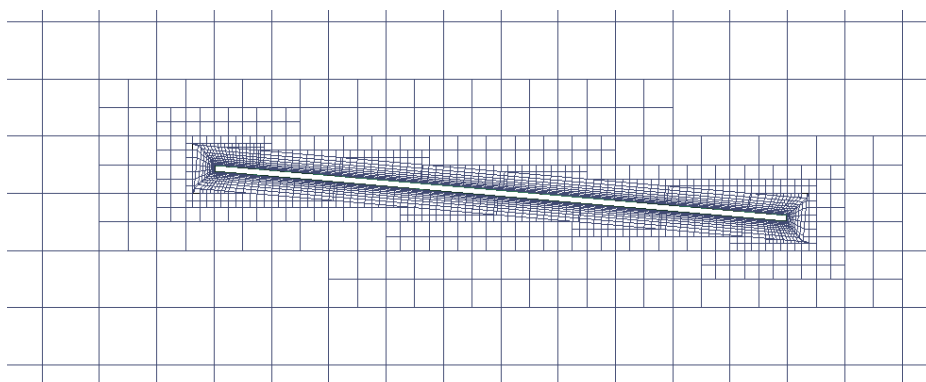


Рис. 29. Пример сетки

В табл. 2 и 3 представлены результаты расчёта подъёмной силы для углов атаки α , равных 5° и 10° . Для сравнения приведены теоретические значения c_y , вычисленные по формуле (14).

Т а б л и ц а 2

Результаты расчёта c_y при угле атаки 5°

Теоретическое	ПО «Логос»	
	Размер базовой ячейки, мм	
	10	
0,54	0,61	

Т а б л и ц а 3

Результаты расчёта c_y при угле атаки 10°

Теоретическое	ПО «Логос»	
	Базовый размер, ячейки, мм	
	5	
1,09	1,10	

Исследуем влияние линейного размера конечного элемента на точность результата согласно ГОСТ Р 57700.10. В процессе исследования сеточной сходимости должен быть построен ряд сеток с различными линейными размерами базовых ячеек и исследован характер изменения изучаемых переменных, построенных на разных сетках. Если кривые переменных стремятся к определённому пределу, сеточная сходимость считается выполненной.

Были выбраны размеры базовой ячейки 7, 5, 2 мм (табл. 4), при этом исследуемый коэффициент c_y показывает монотонно убывающий характер, приближающийся к предельному значению 0,57.

Т а б л и ц а 4

Результаты расчёта c_y при угле атаки 5°

Теоретическое	Практическое			
	Размер базовой ячейки, мм			
	10	7	5	2
0,54	0,61	0,58	0,57	0,57

Расхождение вычисленного в ПО «Логос» и теоретического значений связано с конечным размером пластины и возникновением на ее торцах сил, учитываемых «Логос», но не описываемых теоретическим рассмотрением бесконечно тонкой пластины.

4.4. Обтекание крылового профиля

Прежде чем проводить расчёт, необходимо создать расчётную модель. Это получается разумным отбором учитываемой при расчёте физической модели на упрощённой геометрии детали. Чётких рекомендаций дать невозможно, все зависит от квалификации и опыта проводящего расчёт инженера.

Упрощённая геометрия. Необходимо абстрагироваться от сварных швов, локальных изменений геометрии, толщины листов, болтов. Но при этом необходимо учитывать всю геометрию, что может влиять на гидромеханику обтекаемой детали.

Физическая модель обтекания. Исходя из условий обтекания детали в потоке жидкости, необходимо рассмотреть физическую модель обтекания. Объёмные задачи потребляют значительные машинные ресурсы, поэтому необходимо максимально упростить задачу. Плоская задача предпочтительней трёхмерной. Стационарное обтекание предпочтительней нестационарного. Ламинарное течение предпочтительней турбулентного.

Граничные условия и начальные данные. Граничные условия и исходные данные сильно влияют на характеристики обтекания. Так, границы расчётной области должны быть достаточно большими, чтобы не влиять на обтекание детали; кроме того, на них самих могут возникнуть артефакты дискретизации. Вместе с тем границы расчётной области не должны быть слишком большими, чтобы не загружать мощности компьютера. Турбулентность потока сильно влияет на обтекание, так что необходимо выбрать модель турбулентности, турбулилизацию потока на входе, характеристики пограничного слоя.

Построение дискретной (сеточной) модели. Для построения упорядоченной конечно-элементной сетки каждая линия разбивается на определённое число отрезков. Количество разбиений определяет размер элементов и подбирается таким образом, чтобы элементы являлись четырёхугольными с примерно одинаковыми сторонами, а сама сетка – упорядоченной. Подбор линейного размера элемента и областей с упорядоченной сеткой производится итерационно. Цель этого процесса - оптимизировать количество узлов в модели, чтобы добиться приемлемой точности при наименьшем времени решения.

Построение численной физической модели и решение задачи об определении ГДХ крылового профиля НАСА-2406.

Геометрические характеристики профиля НАСА-2406: относительная толщина $\bar{c} = 0,06$; относительная вогнутость $\bar{f} = 0,02$; относительное положение максимальной вогнутости $\bar{x}_f = 0,40$.

Ординаты крылового профиля приведены в табл. 5.

Т а б л и ц а 5

Ординаты крылового профиля

x	0,00	1,25	2,50	5,00	7,50	10,00	15,00	20,00	25,00
$y_{\text{в}}$	0,00	1,11	1,57	2,28	2,81	3,24	3,90	4,37	4,69
$y_{\text{н}}$	0,00	-0,80	-1,04	-1,29	-1,40	-1,45	-1,44	-1,37	-1,25
x	30,00	40,00	50,00	60,00	70,00	80,00	90,00	95,00	100,00
$y_{\text{в}}$	4,88	4,90	4,60	4,08	3,35	2,44	1,35	0,73	0,00
$y_{\text{н}}$	-1,12	-0,90	-0,70	-0,49	-0,33	-0,20	-0,11	-0,08	0,00

На рис. 30 представлен профиль крылового профиля НАСА-2406.

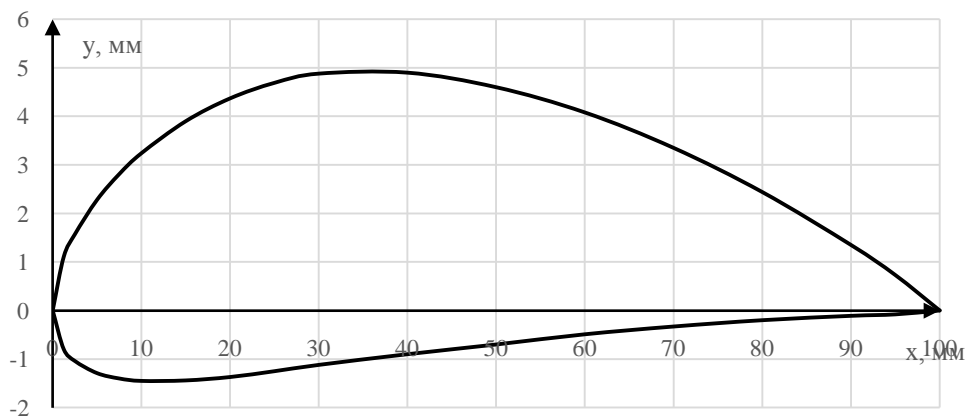


Рис. 30. Профиль крылового профиля НАСА-2406

Эксперимент был выполнен в трубе переменной плотности диаметром 1,52 м (критическое число Рейнольдса 150000) на прямоугольной модели крыла размерами 127×762 мм ($\lambda = 6$). Скорость набегающего потока в эксперименте составляла 21,1 м/с, число $Re = 3120000$. в результатах эксперимента в аэродинамической трубе отсутствуют данные по турбулентности потока.

Результаты эксперимента приведены в табл. 6.

Т а б л и ц а 6

Значения аэродинамических характеристик профиля НАСА-2406, полученные в результате эксперимента

α	c_x	c_y	c_{mA}	c_d
-4	0,010	-0,200	-0,010	—
-2	0,008	-0,020	0,034	—
0	0,008	0,120	0,070	0,583
2	0,012	0,290	0,116	0,383
4	0,020	0,430	0,147	0,343
6	0,028	0,580	0,184	0,318
8	0,040	0,720	0,220	0,306
10	0,060	0,840	0,250	0,298
12	0,100	0,920	0,270	0,293
14	0,170	0,980	0,286	0,291
16	0,230	1,010	0,302	0,299
18	0,290	1,060	0,348	0,345

α	c_x	c_y	c_{mA}	c_d
20	0,340	1,000	0,400	0,400
22	0,380	0,960	0,400	0,417
24	—	0,920	—	—
26	—	0,910	—	—
28	—	0,900	—	—

Верификация и валидация компьютерных моделей. В табл. 7 приведены результаты численного моделирования обтекания крылового профиля средствами ПО «Логос».

Т а б л и ц а 7

Значения аэродинамических характеристик крылового профиля NASA-2406, полученные расчётом в ПО «Логос»

α	F_x	F_y	c_x	c_y
0	1,84	60,99	0,0061	0,2025
5	6,63	264,94	0,0220	0,8795
10	35,00	317,87	0,1162	1,0552
15	61,43	237,52	0,2039	0,7885
20	103,51	293,44	0,3436	0,9741
25	168,00	370,51	0,5577	1,2299

Прежде всего сравним результаты численного моделирования с теоретической формулой, т.е. проведем верификацию расчета. Коэффициент подъемной силы бесконечно длинного крыла:

$$c_y = 2\pi(\alpha + 2f), \quad (15)$$

где α – угол атаки, рад; f – относительная вогнутость.

В табл. 8 приведены значения коэффициента подъемной силы c_y , построенные по формуле (15) при разных значениях угла атаки, и проведено их сравнение с соответствующими значениями c_y , рассчитанными в ПО «Логос». Соответствующие данные приведены на рис. 31.

Т а б л и ц а 8

Значения аэродинамических характеристик крылового профиля NASA-2406, полученные расчётом в ПО «Логос»

α	c_y теор.	c_y числ.
0	0,003	0,2025
5	0,550	0,8795
10	1,099	1,0552

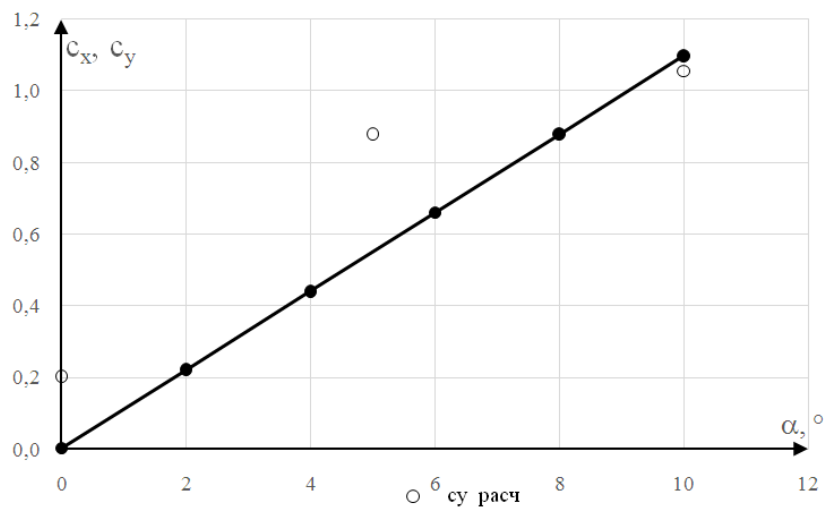


Рис. 31. Зависимость коэффициента подъемной силы c_y от угла атаки α , рассчитанная ПО «Логос» (белые точки), в сравнении с теоретической формулой (чёрные точки)

Рассмотрим результаты численного моделирования обтекания крыла в сопоставлении с данными эксперимента НАСА, т.е. проведем валидацию. Соответствующие графики зависимости коэффициента подъемной силы и сопротивления крыла от угла атаки представлены на рис. 32.

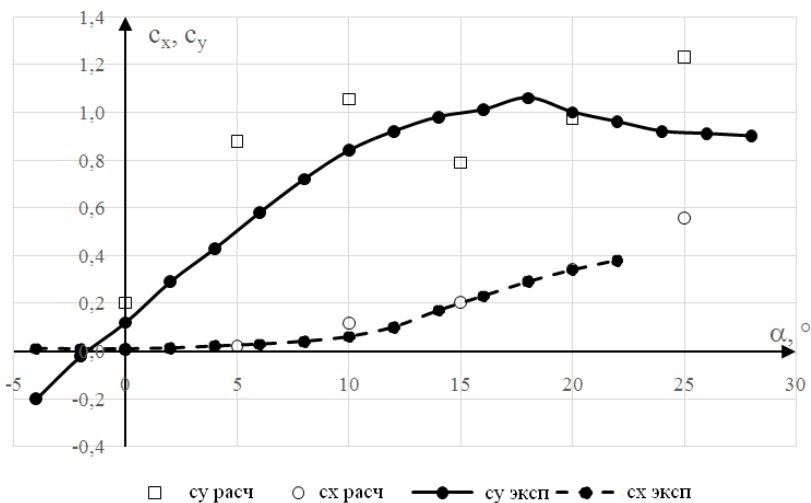


Рис. 32. Зависимость коэффициента подъемной силы c_y и коэффициента сопротивления c_x от угла атаки α , рассчитанная ПО «Логос», в сравнении с результатами эксперимента

Отклонение между значениями эксперимента и вычисленного с помощью ПО «Логос» составляет порядка 10%. Это связано в первую очередь с тем, что крыло является хорошо обтекаемым телом. Однако вопрос качества сетки стоит в данном случае ещё жёстче, чем для цилиндра, в связи с резким изменением кривизны профиля в носовой части крыла.

Вопрос турбулентности стоит здесь также остро, как и ранее. Информация о проведении опытов в аэродинамических трубах свидетельствует о том, что обычно набегающий поток имеет значительную начальную турбулентность, обусловленную работой компрессора и особенностями экспериментальной установки. Турбулентность потока, степень которой обусловлена, в том числе и его начальной турбулентностью, слабо влияет на силовые характеристики объектов при безотрывном обтекании, но может оказывать сильное влияние на отрыв пограничного слоя и вызванное им сопротивление. Для проверки влияния начальной турбулентности набегающего потока на силовые характеристики крыла необходимо выполнить численные расчёты с некоторой заданной начальной турбулентностью.

5. ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ДЛЯ СТУДЕНТОВ

5.1. Обтекание цилиндра невязкой жидкостью

Круглый цилиндр бесконечной длины, образующие которого перпендикулярны плоскости течения, помещён в несжимаемую невязкую жидкость. Скорость жидкости на большом расстоянии от цилиндра – U .

Цель работы – получить картину установившегося режима невязкого обтекания кругового цилиндра при различных числах Рейнольдса и сравнить результаты моделирования с известными из экспериментов изображениями из альбома [8].

5.1.1. Создание CAD-модели

При ограниченности средств редактирования и обработки геометрии средствами самого ПО «Логос» рекомендуется всю геометрию создавать в сторонних средствах CAD-разработки.

Процесс проектирования детали состоит из двух этапов. На первом этапе создаётся CAD-модель самого обтекаемого тела. На втором этапе создаётся расчётная область, которая в простейшем случае представляет собой прямоугольной формы канал, в котором «продувается» исследуемая деталь – так, как это делается в аэродинамических трубах. Размер расчётной области должен быть достаточно большим для того, чтобы близость стенок расчётной области не влияла на ГДХ исследуемого тела. Можно рекомендовать минимальное отстояние стенок расчётной области от крайней точки тела минимум на три размера тела в соответствующем размерении.

В CAD-продукте необходимо обратить внимание на размерность геометрических величин модели и расположение системы координат. Это также необходимо проверить в соответствующем окне при импорте геометрии в ПО «Логос»

После импорта геометрии необходимо проверить её качество и исправить все геометрические ошибки. Если этого не будет сделано, следующий этап – построение сетки – может привести к «зависанию» компьютера.

Расчётный объём, который моделирует среду, можно задавать произвольной формы. Внутри расчётного объёма перпендикулярно направлению потока располагается обтекаемое тело – цилиндр. Принимая во внимание, что цилиндр бесконечный и обтекание его боковых сторон не происходит, задачу нужно ставить в плоской постановке, т.е. линейный размер цилиндра должен быть много меньше его диаметра. При этом размер среды за цилиндром должен превышать диаметр цилиндра, чтобы можно было наглядно наблюдать формирование турбулентных потоков после цилиндра и возвращение потока в спокойное состояние.

Созданная CAD-модель сохраняется в формате *.igs, или *.stp.


5.1.2. Работа с ПО «Логос-ПреПост»

1. Запустить программу «Логос-ПреПост». Главное окно программы представлено в [1, п.1.1].

2. Для создания новой модели выбрать в стандартном меню пользователя пункт *Модель* → *Новая модель* → *Логос-Аэрогидромеханика*.

3. В появившемся диалоговом окне *Параметры расчётной задачи* задать рабочую директорию. Режим запуска – последовательно.

4. Для импорта геометрии в дереве модели нажать правой кнопкой мыши на вкладке *Деталь импортировать геометрию*.


При импорте данных из CAD-файлов задать наименование детали, далее нажать на  (перейти к следующему этапу операции) и задать параметры импорта геометрии. Обратите внимание, чтобы была галочка *Формировать твёрдые тела*, единицы измерения – м. В результате проведения данных действий в «Логос» будет загружена геометрическая модель.

В основном окне программы появится геометрия, которая импортируется в «Логос» (рис. 33).



Рис. 33. Вид окна «Логос-ПреПост» при загруженной геометрии детали

Для данного примера размеры расчётного объёма выбраны равными $6,0 \times 3,0 \times 0,1$ м. Диаметр цилиндра – 1 м.

5. После импорта CAD-модели в верхнем правом углу нажать кнопку  (диагностика несогласованностей геометрии). В панели управления появляется вкладка *Диагностика геометрии*. Проверить геометрию. Если программа обнаружила ошибки, лучше всего исправить их в CAD-продукте.

6. Создать топологию геометрии. На предложение *Сшить всю модель* согласиться.

После создания региона с опцией *Разбить по граням геометрии* в окне визуализации появляется модель аналитического/фасеточного представления, а также изменяется объектное дерево модели – появляются наборы данных «наборы граней» и «наборы ячеек». Также появляются регионы и границы в дереве модели.

В зависимости от выбранного пункта геометрия может иметь одну сплошную границу, либо границы будут разбиты по граням геометрии. При этом в дальнейшем границы можно как объединять, так и разделять на несколько.

7. Раскрыть вкладку *Детали*. С помощью правой кнопки мыши открыть контекстное меню и выбрать пункт *Создать регион*.

8. Задать граничные условия. В разделе *Границы* выбрать левую грань расчётной области – вход. Выбрать тип граничного условия – *Дозвуковой вход* и переименовать, нажав правой кнопкой на грань и выбрав *Операции* и *Переименовать* (в примере грань In). Далее, в графе граничных условий, задать проекции U , V и W скорости потока на координатные оси. Задать скорость вдоль оси Ox равной 0,15 м/с. Для данной задачи это соответствует $Re=104$.

Для правой грани (Out) выбрать тип граничного условия – *Дозвуковой выход*. Для грани цилиндра (Wall) выбрать тип граничного условия *Стенка без проскальзывания*, объединить обе стенки в одну (правой кнопкой по границе и *Операции*). Аналогично объединить остальные границы, результат переименовать и задать *Плоскость симметрии*. На этом задание геометрии завершено, и модель можно сохранить.

9. Построить сетку. Для того чтобы на заданной геометрии можно было провести расчёт, необходимо задать расчётную сетку, в которой будут решаться физические уравнения. В данном ПО существует сетка двух видов: поверхностная и объёмная. Для задания первой выбрать узел дерева *Глобальные параметры сетки* и отметить два генератора *Генератор поверхностной сетки*.

В разделе глобальных параметров появятся подразделы, из которых нужно выбрать *Базовый размер*. Это величина, определяющая максимальный размер ячейки задаваемой сетки. Базовый размер должен быть меньше линейного размера геометрии. В примере он равен 0,01. С помощью пункта *Параметры сетки на поверхности* задать более точные ограничения для ячеек сетки, а также способы оптимизации построения. В данном примере в этом нет необходимости.

После установки базового размера можно приступить к генерации сетки. На панели запустить генератор поверхностной сетки.

После завершения построения сетки, о чём можно узнать из окна информации под геометрией, приступить к генерации объёмной сетки.

Для генерации объёмной сетки снова открыть раздел глобальных параметров и внизу снять указатель с *Генератора поверхностной сетки* и поставить на *Генератор сетки отсечением*, а также повторить процедуру с указанием *Базового*

размера. По умолчанию, *Базовый размер* такой же, как и в поверхностной сетке, но его можно изменять как в большую, так и в меньшую сторону. Для данной задачи оставим его прежним.

На панели запустить объёмный генератор сетки.

Для получения более точного решения на отдельных границах, в разделе *Границы* можно задавать локальные базовые размеры сетки. Обычно это используется для получения более точных результатов в местах резкого изменения искомой функции.

На этом построение расчётной сетки завершено.

10. Задать общие параметры задачи. Перейти в раздел *Общие параметры*. Для данной задачи значение параметра *Тип решателя* оставить по умолчанию *Разделённый*. Параметр *Время* можно выбрать в зависимости от того, необходимо ли отследить изменение параметров во времени или изучить уже установившийся процесс. Для задачи оставить параметр времени *Стационарное*.

11. Задать физические параметры модели в разделе *Физическая модель*. В этом разделе можно выбрать тип течения, а также определить влияние других факторов, существенных для рассматриваемой задачи. В данном случае оставим только тип течения *Турбулентное*.

12. Задать вещество. В данном пункте задаётся вещество, характеристики которого непосредственно изучаются при моделировании. Раскрыть меню *Вещества*. Так как в данном разделе рассматривается невязкое обтекание, выставить вязкость, равную нулю.

13. В разделе *Параметры времени* указать максимальное количество итераций, после которого расчёт остановится. Для задач с малым изменением физических величин достаточно небольшого количества итераций. При сложном течении расчёт может занять больше времени. Для данной задачи установить значение 2000.


14. В разделе *Вывод результатов* задать выводимые после расчёта параметры и периодичность их записи. В пункте *Запись данных для визуализации* установить интервалы по шагам 500. Это значит, что через каждые 500 итераций данные будут записываться в файл и их можно будет посмотреть.

В пункте *Список полей для визуализации* можно изменять выводимые данные. На настоящий момент оставить *Основные поля* по умолчанию, включающие давление и скорость потока, но в дальнейшем их можно менять под конкретную задачу.

15. Запустить расчёт.

Об окончании расчёта можно узнать в окне информации.

5.1.3. Работа с ПО ScientificView

Обработка результатов проводится в постпроцессоре ScientificView. Для того чтобы запустить постпроцессор, нажать кнопку  на панели. Откроется отдельное окно, в котором нужно загрузить результаты расчёта. С периодом, установленным в пункте *Запись данных для визуализации*, программа записывает результаты расчёта в папку EFR, которая находится в том же каталоге, что и модель. Папки STEP означают номер итерации, на которой была проведена запись.

Из этой папки загрузить файл. После загрузки появится первоначальная картинка с распределением координат. В пункте *Отображаемая величина* поставить *В ячейках*, выбрать величину и нажать кнопку *Отобразить*. Для начала это будет скорость по оси *OX*.

После этого в главном окне отобразится распределение скорости потока (рис. 34).

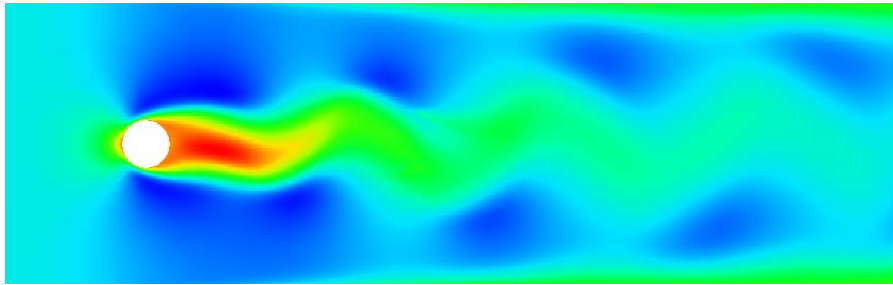


Рис. 34. Визуализация течения в ScientificView

Для нахождения сил давления и трения, действующих на поток, на верхней панели нажать кнопку *Сервис*, далее *Акустика*. В появившемся окне загрузить файл *.fогсе, который находится в том же каталоге, что и модель. На экране появится результат расчёта сил, действующих на границы, условием в которых поставлено *Стенка без/с проскальзыванием* (в примере граница Wall), на каждом итерационном шаге (рис. 35). Большой интерес представляет последний шаг, когда решение нестационарной задачи сошлось.

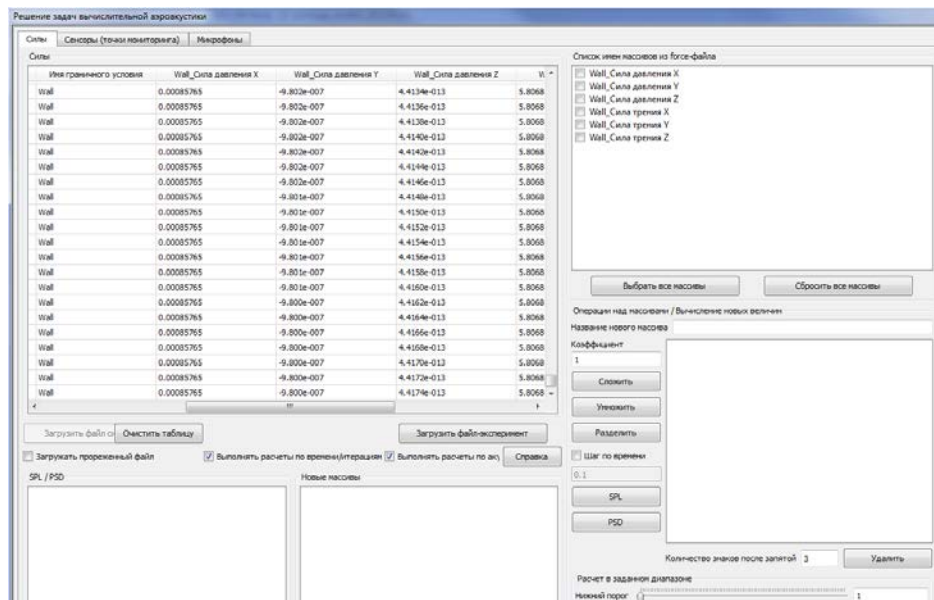


Рис. 35. Вывод результатов в постпроцессоре ScientificView

Сила давления потока на цилиндр вдоль оси X равна 0,00085765, сила трения 0,000058068. Суммарная сила 0,000916. Сила давления значительно превосходит силу трения, что характеризует цилиндр как плохо обтекаемую поверхность.

С помощью постпроцессора ScientificView можно найти точку с максимальной скоростью. Для этого на панели необходимо нажать кнопку *Визуализация* и в графе *Операции* указать максимум. Всё это должно быть выполнено при условии отображения скорости потока в главном окне. После нажатия кнопки *Вычислить* на картине распределения скорости появится точка, в которой наблюдается максимум (рис. 36). Если проделать ту же операцию с давлением, заменив максимум на минимум, то можно убедиться, что точки совпадают.

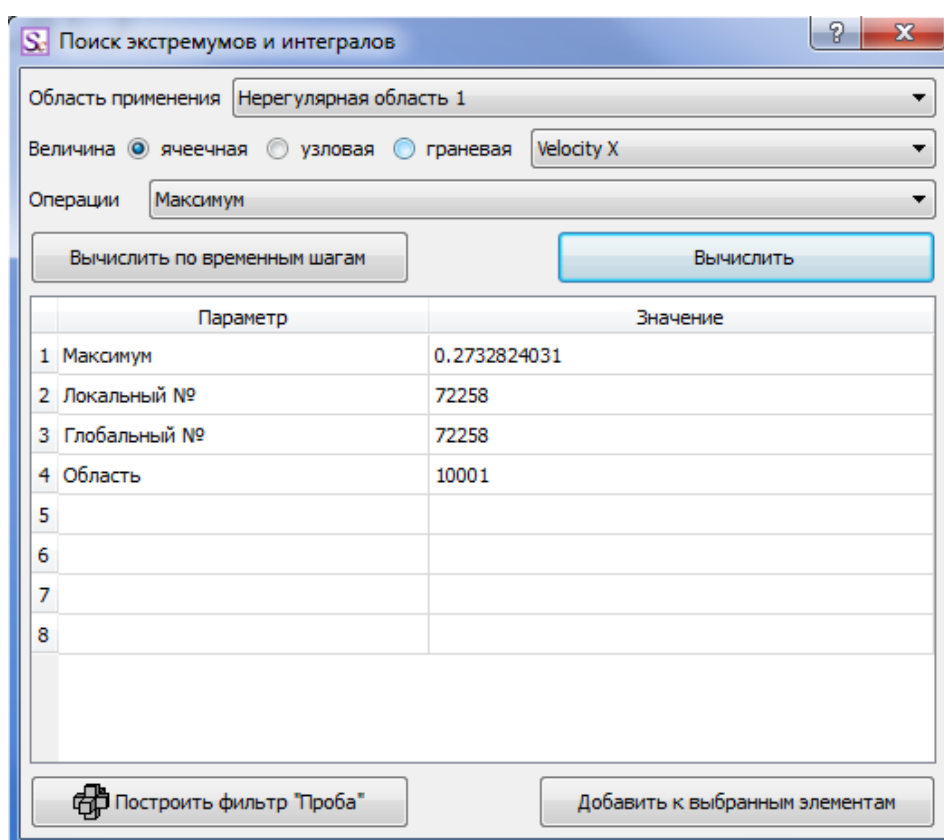




Рис. 36. Вывод результатов в ScientificView. Поиск экстремумов и интегралов

5.2. Обтекание цилиндра вязкой жидкостью

Круглый цилиндр бесконечной длины, образующие которого перпендикулярны плоскости течения, помещён в несжимаемую вязкую жидкость. Скорость жидкости на большом расстоянии от цилиндра – U .

Цель работы – получить картину установившегося режима вязкого обтекания кругового цилиндра при различных числах Рейнольдса и сравнение результатов моделирования с известными из экспериментов изображениями из альбома [8].

5.2.1. Работа с ПО «Логос-ПреПост»

1. Запустить программу «Логос-ПреПост».
2. Для создания новой модели выбрать в стандартном меню пользователя пункт *Модель* → *Новая модель* → *Логос–Аэрогидромеханика*.
3. В появившемся диалоговом окне *Параметры расчётной задачи* задать рабочую директорию. Режим запуска – последовательно.
4. Для импорта геометрии в дереве модели нажать правой кнопкой мыши на вкладке *Деталь – импортировать геометрию*.
5. При импорте данных из САД-файлов задать наименование детали, далее нажать на  (перейти к следующему этапу операции) и задать параметры импорта геометрии. Обратит внимание, чтобы была поставлена галочка *Формировать твёрдые тела*, единицы измерения – м. В результате проведения данных действий в «Логос» будет загружена геометрическая модель.
Для данного примера размеры расчётного объёма выбраны равными $6,0 \times 3,0 \times 0,1$ м. Диаметр цилиндра – 1 м.
5. После импорта САД-модели нажать в верхнем правом углу кнопку  (диагностика несогласованностей геометрии). В панели управления появляется вкладка диагностики геометрии. Проверить геометрию.
6. Создать топологию геометрии. На предложение *Сшить всю модель* согласиться.
После создания региона с опцией *Разбить по граням геометрии* в окне визуализации появляется модель аналитического/фасеточного представления, а также изменяется объектное дерево модели – появляются наборы данных «наборы граней» и «наборы ячеек». Также появляются регионы и границы в дереве модели.
В зависимости от выбранного пункта геометрия может иметь одну сплошную границу либо границы будут разбиты по граням геометрии. В дальнейшем границы можно как объединять, так и разделять на несколько.
7. Раскрыть вкладку *Детали*. С помощью правой кнопки мыши открыть контекстное меню и выбрать пункт *Создать регион*.
8. Задать граничные условия. В разделе *Границы* выбрать левую грань расчётной области – вход. Выбрать тип граничного условия – *Дозвуковой вход* и переименовать, нажав правой кнопкой на грань и выбрав *Операции* и *Переименовать* (в примере грань In). В графе граничных условий задать проекции U, V, W скорости потока на координатные оси. Задать скорость вдоль оси Ox равной $0,15$ м/с. Для данной задачи это соответствует $Re=104$.
Для правой грани (Out) выбрать тип граничного условия – *Дозвуковой выход*. Для грани цилиндра (Wall) выбрать тип граничного условия *Стенка без про-*

скальзывания, объединить обе стенки в одну (правой кнопкой по границе и *Операции*). Аналогично объединить остальные границы, результат переименовать и задать *Плоскость симметрии*. На этом задание геометрии завершено и модель можно сохранить.

9. Построить сетку. Для того чтобы на заданной геометрии можно было провести расчёт, задать расчётную сетку, в которой будут решаться физические уравнения. В данном ПО существует сетка двух видов: поверхностная и объёмная. Для задания первой выбрать узел дерева *Глобальные параметры сетки* и отметить два генератора *Генератор поверхностной сетки*.

В разделе глобальных параметров появятся подразделы, из которых выбрать *Базовый размер*. Это величина, определяющая максимальный размер ячейки задаваемой сетки. Базовый размер должен быть меньше линейного размера геометрии. В примере он равен 0,01. С помощью пункта *Параметры сетки на поверхности* задаются более точные ограничения для ячеек сетки, а также способы оптимизации построения. В данном примере в этом нет необходимости.

После установки базового размера можно приступить к генерации сетки. На панели запустить генератор поверхностной сетки.

После завершения построения сетки, о чём можно узнать из окна информации под геометрией, приступить к генерации объёмной сетки. Для этого снова открыть раздел глобальных параметров и внизу снять указатель с *Генератора поверхностной сетки* и поставить на *Генератор сетки отсечением*, а также повторить процедуру с указанием *Базового размера*. По умолчанию, *Базовый размер* такой же, как и в поверхностной сетке, но его можно изменять как в большую, так и в меньшую сторону. Для данной задачи оставить его прежним.

На панели запустить объёмный генератор сетки.

Для получения более точного решения на отдельных границах в разделе *Границы* можно задавать локальные базовые размеры сетки. Обычно это используется для получения более точных результатов в местах резкого изменения искомой функции.

На этом построение расчётной сетки завершено.

10. Задать общие параметры задачи. Перейти в раздел *Общие параметры*. Для данной задачи значение параметра *Тип решателя* оставить по умолчанию *Разделённый*. Параметр *Время* выбрать в зависимости от того, необходимо ли отследить изменение параметров во времени или изучить уже установившийся процесс. Для задачи оставить параметр времени *Стационарное*.

11. Задать физические параметры модели в разделе *Физическая модель*. В этом разделе выбрать тип течения, а также определить влияние других факторов, существенных для рассматриваемой задачи. В данном случае оставить только тип течения *Турбулентное*.

12. Задать вещество. В данном пункте задать вещество, характеристики которого непосредственно изучаются при моделировании. Раскрыть меню *Вещества*. Вязкость жидкости задать равной 0,0185 Па·с, плотность 1,205 кг/м³.

13. В разделе *Параметры времени* можно указать максимальное количество итераций, после которого расчёт остановится. Для задач с малым изменением

физических величин достаточно небольшого количества итераций. При сложном течении расчёт может занять больше времени. Для данной задачи установить значение 2000.


14. В разделе *Вывод результатов* задать выводимые после расчёта параметры и периодичность их записи. В пункте *Запись данных для визуализации* установить интервалы по шагам 500. Это значит, что через каждые 500 итераций данные будут записываться в файл и их можно будет посмотреть.

В пункте *Список полей для визуализации* можно изменять выводимые данные. На настоящий момент оставить *Основные поля по умолчанию*, включающие давление и скорость потока, но в дальнейшем их можно менять под конкретную задачу.

15. Запустить расчёт.

Об окончании расчёта можно узнать в окне информации.

5.2.2. Работа с ПО ScientificView

Обработка результатов проводится в постпроцессоре ScientificView. Для того чтобы запустить постпроцессор, необходимо нажать кнопку  на панели. Откроется отдельное окно, в котором нужно загрузить результаты расчёта. С периодом, установленным в пункте *Запись данных для визуализации*, программа записывает результаты расчёта в папку EFR, которая находится в том же каталоге, что и модель. Папки STEP означают номер итерации, на которой была проведена запись. Из этой папки нужно загрузить файл. После загрузки появится первоначальная картинка с распределением координат. В пункте *Отображаемая величина* поставить *В ячейках*, выбрать величину и нажать кнопку *Отобразить*. Для начала это будет скорость по оси *OX*. После этого в главном окне отобразится распределение скорости потока.

Для нахождения сил давления и трения, действующих на поток, на верхней панели нажать кнопку *Сервис*, далее *Акустика*. В появившемся окне загрузить файл *.force, который находится в том же каталоге, что и модель. На экране появится результат расчёта сил, действующих на границы, условием в которых поставлено *Стенка без/с проскальзыванием* (в примере граница Wall), на каждом итерационном шаге. Большой интерес представляет последний шаг, когда решение нестационарной задачи сошлось.

С помощью постпроцессора ScientificView можно найти точку с максимальной скоростью. Для этого на панели нажать кнопку *Визуализация* и в графе *Операции* указать максимум. Всё это должно быть выполнено при условии отображения скорости потока в главном окне. После нажатия кнопки *Вычислить*, на картине распределения скорости появится точка, в которой наблюдается максимум. Если проделать ту же операцию с давлением, заменив максимум на минимум, то можно убедиться, что точки совпадают.

Библиографический список

1. ВНИИЭФ Руководство пользователя ЛОГОС–ПреПост 5.3.18. 2018. Текст. Изображения: электронные.
2. ВНИИЭФ Руководство пользователя ScientificView 5.3.18. 2018. Текст. Изображения: электронные.
3. *Аржаников, Н.С.*, Мальцев В.Н. Аэродинамика М.: Гос. изд-во оборонной промышленности, 1956. 484 с.
4. *Ачкинадзе, А.Ш.*, Бесядовский А.Р., Васильева В.В. Гидромеханика. СПб.: МорВест, 2007. 552 с.
5. *Башкин, В.А.*, Егоров И.В. Численное исследование задач внешней и внутренней аэродинамики. М.: Физматлит, 2013. 332 с.
6. *Белов, И.А.*, Исаев С.А. Моделирование турбулентных течений: учебное пособие. СПб.: Балт. гос. техн. ун-т, 2001. 108 с.
7. *Быков, Л.В.* [и др.]. Основы вычислительного теплообмена и гидродинамики: учебное пособие. 2-е изд., перераб. и доп. М.: ЛЕНАНД, 2019. 200 с.
8. *Ван-Дайк, М.* Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир, 1986. 184 с.
9. *Волков, К.Н.*, Емельянов В.Н. Моделирование крупных вихрей в расчётах турбулентных течений. М.: Физматлит, 2008. 368 с.
10. *Горлин, С.М.* Экспериментальная аэромеханика. М.: Высшая школа, 1970. 412 с.
11. *Девнин, С.И.* Аэрогидромеханика плохо обтекаемых конструкций: справочник. Л.: Судостроение, 1983. 320 с.
12. *Жинкин, В.Б.* Теория и устройство корабля. СПб.: Судостроение, 2002. 336 с.
13. *Кочин, Н.Е.*, Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. В 2 ч. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 584 с.
14. *Кравец, А.С.* Характеристики авиационных профилей. М.: Гос. изд-во оборонной промышленности, 1939. 332 с.
15. *Лойцянский, Л.Г.* Механика жидкости и газа: учебник для вузов. 7-е изд. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
16. *Павленко, В.Г.* Основы механики жидкости. Л.: Судостроение, 1988. 240 с.
17. *Патанкар, С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 152 с.

О Г Л А В Л Е Н И Е

1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ АЭРОГИДРОМЕХАНИКИ.....	3
1.1. Физические параметры и модели состояния среды.....	4
1.2. Основные уравнения аэрогидромеханики.....	6
1.3. Пограничный слой и характер обтекания тел.....	8
1.4. Переход ламинарного движения в турбулентное.....	10
1.5. Законы подобия и безразмерные коэффициенты аэрогидродинамических сил.....	10
1.6. Теория обтекания тел при решении задач аэрогидромеханики.....	14
1.6.1. Внешние задачи гидродинамики в плоской постановке.....	14
1.6.2. Обтекание цилиндра невязкой жидкостью.....	15
1.6.3. Метод конформных отображений для решения плоских потенциальных задач гидромеханики.....	22
1.6.4. Обтекание плоской пластины.....	23
1.6.5. Обтекание цилиндра вязкой жидкостью.....	24
1.7. Теория крыла при решении задач гидроаэромеханики.....	30
1.7.1. Возникновение подъёмной силы на крыле.....	30
1.7.2. Геометрические характеристики крыла.....	32
1.7.3. Лобовое сопротивление крыла.....	33
1.7.4. Аэродинамическое качество крыла и поляра крыла.....	35
2. ГИДРОМЕХАНИКА ПОДВОДНОГО АППАРАТА.....	36
2.1. Параметры, используемые при описании движения ПА.....	37
2.2. Интегральные (осреднённые) гидродинамические характеристики (ГДХ).....	38
2.3. Уравнения движения ПА.....	39
2.4. Теория гребного винта.....	41
2.5. Задачи, возникающие при определении ГДХ и параметров движения.....	43
3. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ АЭРОГИДРОМЕХАНИКИ.....	45
3.1. Методы дискретизации и решения уравнений Навье–Стокса.....	45
3.2. Метод конечного объёма.....	46
3.2.1. Модели турбулентности.....	48
3.2.2. Моделирование течений вблизи сетки.....	49
3.2.3. Модели DNS, LES, DES.....	51
4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ АЭРОГИДРОМЕХАНИКИ СРЕДСТВАМИ ПО «ЛОГОС».....	52
4.1. Основные задачи численного моделирование.....	52
4.1.1. Постановка задачи.....	52
4.1.2. Выбор численной схемы.....	53
4.1.3. Построение сетки и выбор шагов по времени.....	54
4.1.4. Верификация полученного решения.....	55
4.2. Обтекание цилиндра невязкой жидкостью.....	55
4.3. Обтекание пластины невязкой жидкостью.....	58
4.4. Обтекание крылового профиля.....	61

5. ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ДЛЯ СТУДЕНТОВ	65
5.1. Обтекание цилиндра невязкой жидкостью	65
5.1.1. Создание CAD-модели	65
5.1.2. Работа с ПО «Логос-ПреПост»	66
5.1.3. Работа с ПО ScientificView	68
5.2. Обтекание цилиндра вязкой жидкостью	70
5.2.1. Работа с ПО «Логос-ПреПост»	71
5.2.2. Работа с ПО ScientificView	73
Библиографический список	74

*Кравченко Кирилл Николаевич, Глазунова Елена Владимировна,
Курносов Андрей Алексеевич, Деулин Андрей Александрович,
Фомичев Дмитрий Вадимович, Зорнина Наталья Александровна,
Андреев Павел Сергеевич, Тетерина Ирина Владимировна*

**Расчет обтекания подводного аппарата в среде «Логос». Плоская задача
внешней гидродинамики**

Редактор *Г.М. Звягина*
Компьютерная верстка: *С.В. Кашуба*
Подписано в печать 15.12.2021. Формат 70x100/16. Бумага документная.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 6. Тираж 300 экз. **Заказ №** .
Балтийский государственный технический университет
190005, С.-Петербург, 1-я Красноармейская ул., д.1